

Математическая физика транспортных потоков

© 2009 г. А.В. Гасников

(на основе совместного с А.П. Буслаевым и М.В. Яшиной обзора)

ГЛАВА 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ	2
3.1 Макроскопические модели.....	2
3.1.1 Модель Лайтхилла – Уизема - Ричардса	2
3.1.2 Модель Танака.....	9
3.1.3 Модель Уизема	10
3.1.4 Модель Пэйна и её обобщения	14
3.1.5 Кинетические модели	15
3.1.6 Стохастические модели	15
3.1.7 Практические приложения моделей.....	15
3.2 Микроскопические модели	18
3.2.1 Модель оптимальной скорости Ньюэлла	18
3.2.2 Модель следования за лидером Дженерал Моторс	21
3.2.3 Модель “разумного водителя” Трайбера.....	21
3.2.4 Модели клеточных автоматов.....	23
3.3 Модельные задачи.....	24
3.3.1 Эволюции затора в транспортном потоке, описываемом моделями Лайтхилла – Уизема - Ричардса и Уизема.....	24
3.3.2 Эволюции локального затора в транспортном потоке, описываемом моделью Лайтхилла – Уизема – Ричардса.....	33
3.3.3 Задача о светофоре (при каких условиях перед светофором не будет скапливаться очередь)	35
3.3.4 Задача о сужении дороги.....	36
3.3.5 Модельные задачи на графах и устойчивость.....	36
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	37

ГЛАВА 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

3.1 МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В п. 3.1 приводятся основные (с исторической точки зрения, и с точки зрения возможных приложений) *макроскопические модели*, в основном, однополосных транспортных потоков. Много внимания уделяется гидродинамическим аналогиям (*транспортный поток* уподобляется *сжимаемой жидкости с мотивацией*, которая присутствует, например, в *уравнении состояния* транспортного потока (зависимости *скорости потока* от *плотности*)). Ключевым понятием этого пункта является *обобщенное решение* начальной задачи Коши для закона сохранения, описывающего транспортный поток. Так, например, разрывы обобщенного решения интерпретируются, как границы заторов (переход от свободного движения к заторному).

3.1.1 МОДЕЛЬ ЛАЙТХИЛЛА – УИЗЕМА - РИЧАРДСА

Во второй половине 40-ых годов и в 50-ые годы XX века в СССР и США интенсивно занимались исследованием процессов, возникающих при взрыве бомбы (см., например, монографии [1], [2]). В частности, большое внимание было уделено изучению начально-краевых задач для уравнения (и систем таких уравнений) типа закона сохранения. В это же время наблюдался и рост приложений, в которых встречаются схожие уравнения. Так в 1955 г. независимо в работах [3] и [4] была предложена, по-видимому, первая макроскопическая (гидродинамическая) модель однополосного (полоса бесконечная в обе стороны, движение происходит слева направо (для определенности), нет источников и стоков *автомобильных транспортных (автотранспортных) средств (АТС)*) транспортного потока, получившая впоследствии название *модели Лайтхилла – Уизема – Ричардса* (часто эту модель называют *моделью Лайтхилла - Уизема*¹), в которой поток АТС рассматривается как поток одномерной сжимаемой жидкости.

В модели Лайтхилла – Уизема - Ричардса предполагается, что

- 1) существует взаимнооднозначная зависимость между скоростью $v(t, x)$ и плотностью (погонной) $\rho(t, x)$ потока;
- 2) выполняется закон сохранения плотности АТС $\rho(t, x)$.

Запись $\rho(t, x)$ обозначает число АТС на единицу длины в момент времени t в окрестности точки трассы с координатой x . Аналогично, $v(t, x)$ - скорость АТС в момент времени t в окрестности точки трассы с координатой x . Везде в дальнейшем предполагается, что пространственные масштабы, на которых транспортный поток описывается макроскопическими (гидродинамическими) моделями, значительно превышают характерный размер АТС (т.е. составляют не менее сотни метров). В таком предположении, мы будем интерпретировать $\rho(t, x)$, $v(t, x)$ ни как некоторые должным образом усредненные величины (см., например, [3]), а как функции, получающиеся при переходе от *микроскопического описания* (в том числе и описания с помощью *клеточных*

¹ Иногда (см., например, работы С.П. Новикова (с соавторами)) говорят “Уитема”, вместо “Уизема”.

автоматов (см. п. 3.2)) к макроскопическому. Иначе говоря, мы считаем что транспортный поток подчиняется некоторой микроскопической модели, в которой детально описывается поведение АТС, в зависимости от обстановки впереди, и эта модель является разностным или дифференциально – разностным аналогом рассматриваемой нами макроскопической модели. Таким образом, корректность, предложенного здесь подхода к определению $\rho(t, x)$, $v(t, x)$ основывается на устойчивой аппроксимации макроскопической модели микроскопической. При этом необходимость рассмотрения макроскопических моделей обусловлена в первую очередь более простой техникой их исследования и большей наглядностью (в виду гидродинамических параллелей).

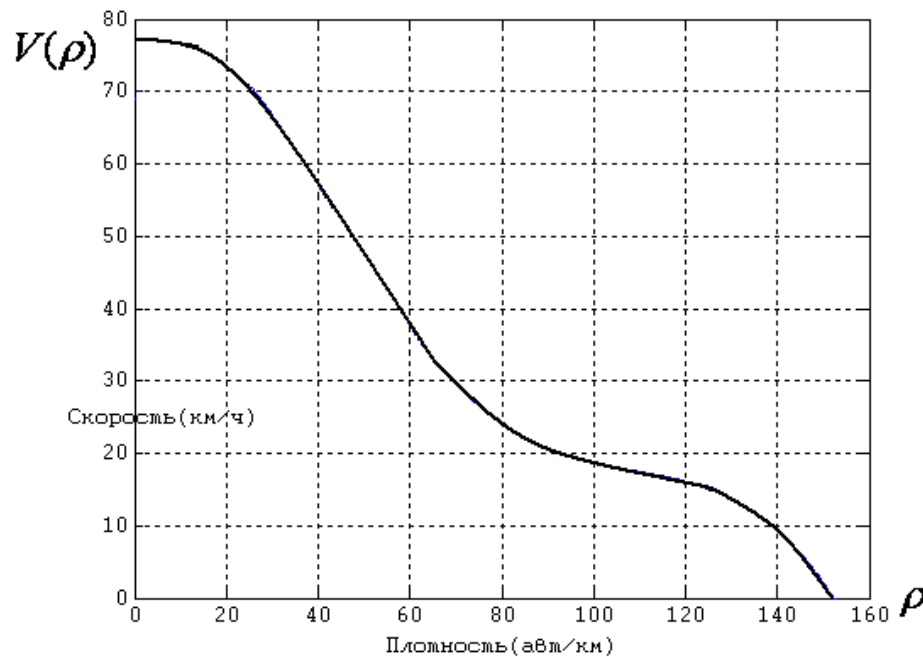


Рис. 1 (Уравнение состояния транспортного потока)

Первое предположение выразим условием:

$$v(t, x) = V(\rho(t, x)). \quad (1)$$

Относительно функции $V(\rho)$ делается следующее предположение:

$$V'(\rho) < 0, \quad (2)$$

где $Q(\rho) = \rho V(\rho)$ - величина потока АТС (количество АТС, проходящих в единицу времени через заданное сечение). Зависимость $Q(\rho)$ часто называют **фундаментальной (или основной) диаграммой**. Для однополосного потока принято считать $Q''(\rho) < 0$ [5] (что можно понимать следующим образом: движение по двум одинаковым и независимым полосам с разными плотностями менее эффективно, чем движение по этим полосам с одинаковой плотностью равной среднему арифметическому первоначальных плотностей). Однако если агрегировать несколько полос в одну (иначе говоря, заменить несколько полос одной агрегированной, на которой уже использовать рассматриваемую модель), то, как показывают наблюдения за реальными транспортными потоками, от вогнутости

$Q(\rho)$, вообще говоря, придется отказаться. Так на рис. 1, 2 отображены экспериментальные данные “Центра Исследования Транспортной Инфраструктуры г. Москвы”, собранные (в течение одного дня в 2005 г.) по четырем полосам на участке третьего транспортного кольца от Автозаводской улицы до Варшавского шоссе и агрегированные на одну полосу И.Е. Виноградовым в дипломной работе (ВМК МГУ, кафедра Системного анализа, 2007 г.). Заметим, что в действительности измерялась зависимость $V(Q)$. Объяснить небольшой провал величины потока $Q(\rho)$ при плотностях $\rho \sim 60-115$ АТС/км можно, по-видимому, тем, что при этих плотностях существенное влияние на величину потока оказывают перемещения АТС с одной полосы на другую. Перестраивания АТС из одной полосы в другую полосу снижают величину потока (с одной стороны за счет перемещения из полосы в полосу можно двигаться быстрее, но с другой стороны в среднем такие перемещения приводят к дополнительным затратам на само перестраивание, и замедление тех АТС, перед которыми встраивается другое АТС), что хорошо согласуется с практическим наблюдением: “пропускная способность n -полосной дороги меньше пропускной способности n отдельных однополосных дорог”. Другое объяснение этого наблюдения имеется в п. 3.1.6 и связано с тем, что при $\rho \sim 60-115$ АТС/км само понятие “фундаментальная диаграмма” не совсем корректно. Иначе говоря, при этих плотностях нет четкой зависимости величины потока (скорости) от плотности. Одному значению плотности соответствует целый промежуток возможных значений потока (скорости).

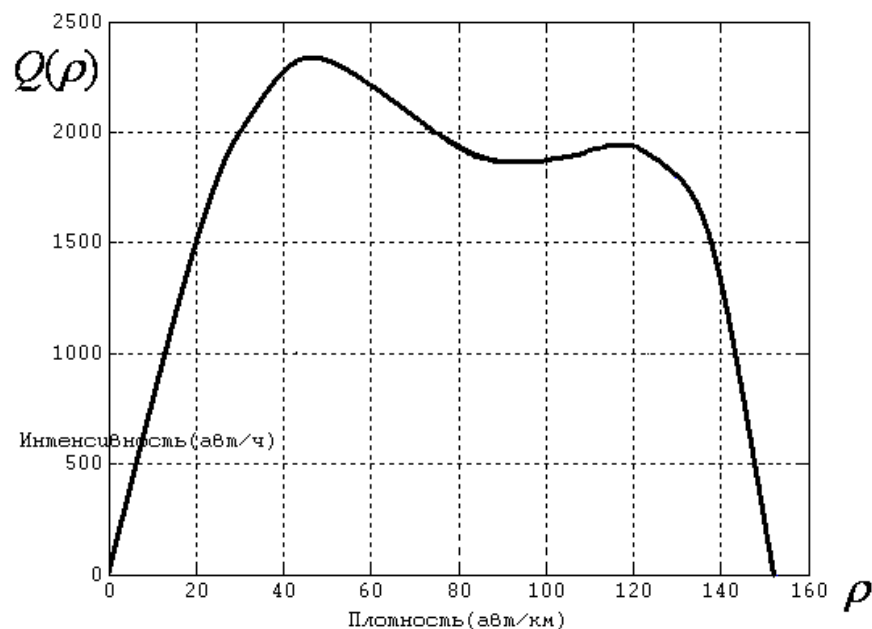


Рис. 2 (Фундаментальная диаграмма)

Второе предположение выразим законом сохранения

$$\int_a^b \rho(t+\Delta, x) dx - \int_a^b \rho(t, x) dx = - \left\{ \int_t^{t+\Delta} Q(\rho(\tau, b)) d\tau - \int_t^{t+\Delta} Q(\rho(\tau, a)) d\tau \right\}.$$

Отсюда следует, что для любого прямоугольного контура Γ в полуплоскости $t \geq 0$, со сторонами параллельными осям (легко показать, что соотношения (3) справедливо для произвольного кусочно гладкого контура Γ), выполняется:

$$\oint_{\Gamma} \rho(t, x) dx - Q(\rho(t, x)) dt = 0. \quad (3)$$

В точках гладкости $\rho(t, x)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(V(\rho)\rho)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Поставим начальное условие вида (условие типа Римана)

$$\rho(0, x) = \begin{cases} \rho_-, & x < x_- \\ \rho_0(x), & x_- \leq x < x_+ \\ \rho_+, & x \geq x_+ \end{cases} \quad (5)$$

Задача Коши (4), (5) возникает, например, при описании распространения затора (пробки): пусть $\rho'_0(x) > 0$, $\rho_+ = \rho_{\max}$, где $\rho_{\max}$ - максимально возможная плотность (ситуация “бампер к бамперу”), требуется определить как по транспортному потоку будет распространяться информация о заторе впереди. Решение этой задачи позволит ответить, например, на следующий вопрос: если движение АТС с утра на Дмитровском шоссе в сторону Москвы “встало” в районе г. Долгопрудный, то через какое время затор дойдет до г. Дмитрова? Ряд интересных модельных задач (задача о светофоре, об эволюции локального затора и др.) для закона сохранения (4) рассмотрен в 2-ой и 3-ей главе книги [5] (см. также п. 3.3).

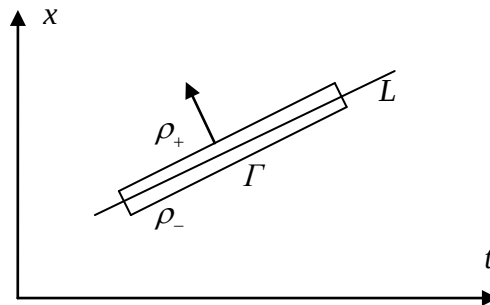


Рис. 3 (R – H условие на разрыве)

Вернемся к соотношению (3). Обратим внимание, что это соотношение может быть выполнено и для разрывной функции плотности $\rho(t, x)$. Причем разрыв функции $\rho(t, x)$ - есть резкое увеличение плотности, что соответствует границе затора. Пусть в момент времени t разрыв находится в точке с координатой x , и $\rho(t, x-0) = \rho_-$, $\rho(t, x+0) = \rho_+$. Предположим, что на плоскости (t, x) этому разрыву соответствует кривая L . Возьмем в окрестности точки $(t, x) \in L$ прямоугольный контур (для определенности зададим ориентацию по часовой стрелки) так, как показано на рис. 3. Будем считать, что ширина контура Γ настолько мала по сравнению с длиной, что интегралом по участкам контура Γ , поперечным к L , можно пренебречь (см. рис. 3).

Тогда из (3) следует, что

$$0 = \oint_{\Gamma} (\rho(t, x) dx - Q(\rho(t, x)) dt) = (\rho_+ c - Q(\rho_+)) \Delta t - (\rho_- c - Q(\rho_-)) \Delta t + o(\Delta t),$$

где $c = dx/dt$ - соответствует наклону касательной к L в точке (t, x) , Δt - длина проекции контура на ось t . При $\Delta t \rightarrow 0$ это равенство переходит в следующее условие для скорости движения разрыва c , которое обычно называется *условием Гюгонио – Ранкина*²

$$c = \sigma(\rho_-, \rho_+) = \frac{Q(\rho_+) - Q(\rho_-)}{\rho_+ - \rho_-} (R - H).$$

Оказывается, что уравнение (4) всегда имеет слабое (удовлетворяющее соотношению (3), и начальному условию (5) в слабом смысле) решение (см. [6]), но, как показывает следующий пример, оно может иметь бесконечно много решений, т.е. нет единственности.

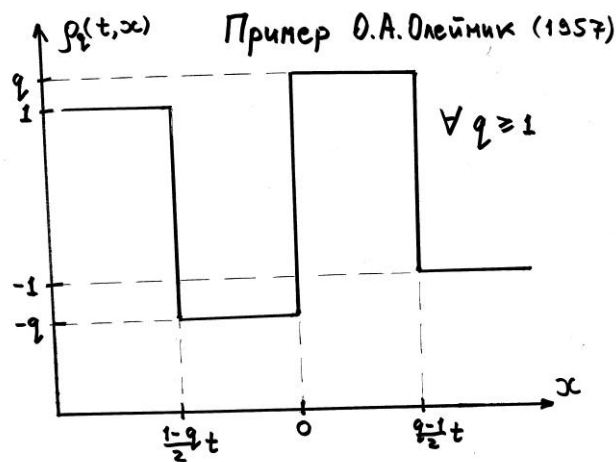


Рис. 4

Пример (О.А. Олейник [7]). Рассмотрим³ уравнение Хопфа (см. [8])

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

и начальное условие Римана

$$\rho(0, x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}.$$

Так, например, при любом $q \geq 1$ определенная в точках полуплоскости $t \geq 0$, функция

$$\rho_q(t, x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{1-q}{2}t \\ -q, & \frac{1-q}{2}t < x \leq 0 \\ q, & 0 < x \leq \frac{q-1}{2}t \\ -1, & \frac{q-1}{2}t < x \end{cases}$$

² Это условие также называют *условием Гюгонио* (см. [§ 64, 2]); вместо “Ранкина” иногда говорят “Ренкина”.

³ О важности (исторической, и не только) именно этого уравнения для моделирования транспортных потоков см. в п. 3.1.3 (заменой переменных и неизвестной функции к уравнению Хопфа можно свести довольно популярный частный случай модели Лайтхилла – Уизема – Ричардса - модель Гриншилдса).

удовлетворяет при $t > 0$ уравнению (4) в смысле (3) (достаточно проверить, что на разрывах выполняется условие $R - H$) и начальному условию (5) (см. рис. 4). ■

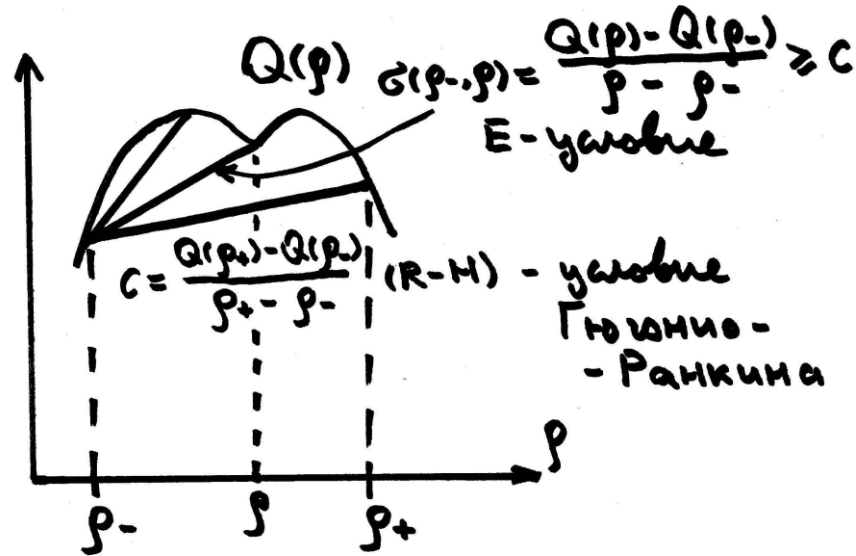


Рис. 5

Единственное решение выбирает условие отбора, по-видимому, впервые предложенное О.А. Олейник в 1958 г. [9] (в частном случае выпуклой (вогнутой) $Q(\rho)$ см. О.А. Олейник (1957) [7]) и И.М. Гельфандом в 1959 г. [10] (работа [10] представляет собой запись курса лекций, сыгравшего важную роль в популяризации теории квазилинейных уравнений и законов сохранения, которые И.М. Гельфанд читал на мехмате МГУ в 1957 – 1958 гг.), как *условие устойчивости (допустимости) разрыва*.

На разрыве, помимо $R - H$ условия, также должно выполняется *Е – условие*⁴:

$$\forall \rho \in (\rho_-, \rho_+) \rightarrow \sigma(\rho_-, \rho_+) \leq \sigma(\rho_-, \rho), \text{ если } \rho_- < \rho_+,$$

$$\forall \rho \in (\rho_+, \rho_-) \rightarrow \sigma(\rho_-, \rho_+) \geq \sigma(\rho_-, \rho), \text{ если } \rho_- > \rho_+.$$

Е – условие имеет наглядную (см. рис. 5) геометрическую интерпретацию (для определенности считаем $\rho_- < \rho_+$): график функции $Q(\rho)$ при $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$ лежит не ниже прямой, проходящей через точки $(\rho_-, Q(\rho_-))$ и $(\rho_+, Q(\rho_+))$. При этом скорость движения разрыва s равна наклону этой прямой.

Для случая вогнутой функции $Q(\rho)$, разрыв устойчив тогда и только тогда, когда дав точкам разрыва двигаться вдоль характеристик, мы сразу же получим многозначное решение [10] (разрыв будет опрокидываться подобно морской волне).

Пример (см. [11]). Снова возьмем уравнение Хопфа и начальное условие

$$\rho(0, x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Возможны следующие слабые решения задачи Коши (4), (5):

⁴ Это условие также называют *энтропийным условием*, *энтропийным условием О.А. Олейник*, *Е – условием О.А. Олейник*. Объяснение (основанное на методе исчезающей вязкости, см. п. 3.1.3) того, откуда возникло Е – условие (и $R - H$ условие) будет приведено в п. 3.3.1. Заметим также, что в классе кусочно-постоянных начальных условий (аппроксимирующих класс ограниченных измеримых начальных условий) добавление Е – условия, как условия отбора возможных разрывов, к соотношению (3) однозначно и конструктивно определяет динамику $\rho(t, x)$. Отмеченная конструктивность, активно использовалась в 70-ых и 80-ых годах XX века, например, при исследовании модельных задач п. 3.3.

$$\rho_1(t, x) = \begin{cases} -1, & x \leq -t \\ \frac{x}{t}, & -t < x \leq t \\ 1, & x > t \end{cases} \quad \rho_2(t, x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

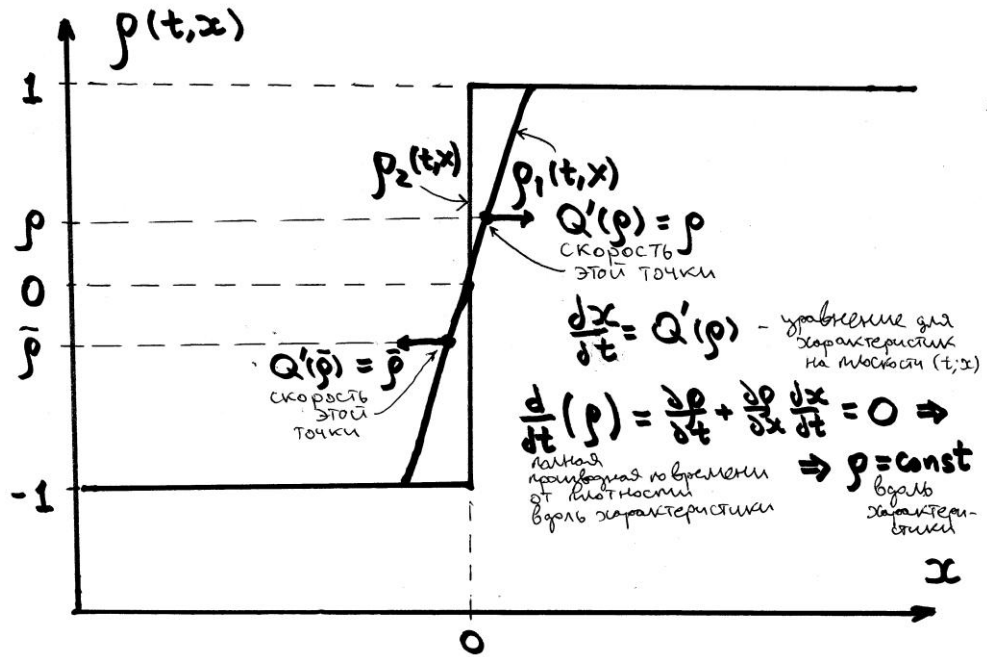


Рис. 6

“Размазывая” разрыв начальных данных в точке $x=0$, т.е. вводя $\rho^\delta(0, x)$ – монотонно возрастающую непрерывную функцию, совпадающую вне отрезка $|x| \leq \delta$ с $\rho(0, x)$, мы увидим (используя, например, классический метод характеристик⁵ (см. рис. 6), работоспособность которого в данной ситуации обеспечивается отсутствием пересечений у характеристик), что $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \rho^\delta(t, x) = \rho_1(t, x)$. Т.е. неклассическое решение $\rho_2(t, x)$ не является устойчивым решением. Несложно проверить, что на разрыве решения $\rho_2(t, x)$ не выполняется Е – условие, поэтому $\rho_2(t, x)$ не является решением. Если посмотреть на поведение характеристик системы, то можно заметить, что для решения $\rho_2(t, x)$ разрыв надуман – он не вызван пересечением характеристик. Вместо того чтобы пересекаться на разрыве, характеристики расходятся от разрыва. ■

Отметим, что классический метод характеристик для решения уравнений в частных производных первого порядка может использоваться лишь локально для уравнения (4), т.к. по прошествии некоторого времени характеристики могут начать пересекаться и возникнет неоднозначность: одной точке (t, x) будут соответствовать несколько, вообще

⁵ Уравнения семейства характеристик на плоскости (t, x) имеют вид: $dx/dt = Q'(\rho(t, x))$. Поэтому полная производная по времени от функции $\rho(t, x)$ вдоль характеристики есть:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + Q'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0,$$

т.е. $\rho(t, x) \equiv \text{const}$ – вдоль характеристики.

говоря, разных значений ρ (принесенных по характеристикам). Собственно, там где характеристики начинают пересекаться, и возникает разрыв у решения уравнения (5) [12]. Метод характеристик вкупе с условиями на разрыве был одним из первых методов исследования задачи Коши (4), (5).

Заметим также, что процесс, описываемый разрывным решением (4), необратим во времени (см., например, [11], [12]). Причем условие разрывности процесса существенно для необратимости. Так в примере О.А. Олейник $\rho_q(t, x)$ при $q=1$ является разрывным решением (4), (5), для которого выполняется Е – условие (как строгое неравенство). Если решать (4), (5) в попятном времени, то неравенство в Е – условии поменяется на противоположное, поэтому, если $\rho_q(t, x)$ при $q=1$ удовлетворяла прямому Е – условию, то оно точно не может удовлетворять попятному Е – условию. Заметим однако, что уравнение (4) выглядит симметричным относительно обращения времени ($t \rightarrow -t$), поскольку при попятном течении времени величина потока $Q(\rho)$ изменяет знак на противоположный. Однако, как уже отмечалось, уравнение (4), понимаемое в слабом смысле, определяет эволюцию системы, вообще говоря, не единственным образом. Выделение единственного решения является необратимой по времени процедурой.

Приведем в заключении еще один пример, показывающий отличие закона сохранения (4) от уравнений, описывающих только гладкие решения.

Пример (И.М. Гельфанда [10]). Снова возьмем уравнение Хопфа, и запишем его в двух дивергентных формах (задав $\rho(0, x) > 0$, мы можем быть уверены в том, что везде в дальнейшем $\rho(t, x) > 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho^2/2)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho^3/3)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Второе уравнение получается умножением уравнения Хопфа на $\rho > 0$ и приведением полученного уравнения к дивергентному виду. Написав для каждого из этих уравнений условие типа R - H на разрыве (мы говорим “типа R – H”, потому что пользуемся обобщением этого условия: $c = (q(\rho_+) - q(\rho_-)) / (\eta(\rho_+) - \eta(\rho_-))$ на разрыве решения уравнения $\partial \eta(\rho) / \partial t + \partial q(\rho) / \partial x = 0$, с $\eta'(\rho) > 0$):

$$C_1 = \frac{\rho_+^2/2 - \rho_-^2/2}{\rho_+ - \rho_-} = \frac{1}{2}(\rho_+ + \rho_-) = \frac{2}{3} \frac{\rho_+^2 + \rho_+ \rho_- + \rho_-^2}{\rho_+ + \rho_-} = \frac{\rho_+^3/3 - \rho_-^3/3}{\rho_+^2/2 - \rho_-^2/2} = C_2,$$

легко убеждаемся в неэквивалентности этих дивергентных форм (если рассматривать обобщенные решения). ■

Замечание (см. [13]). Пусть $Q(\rho)'' < 0$ ($Q(\rho)'' > 0$). Тогда существует такая положительная гладкая функция $\psi(\rho)$, что уравнение (4), умноженное на $\psi(\rho)$, будет иметь скорость разрыва k :

$$Q'(\rho_-) < k < Q'(\rho_+) \quad (Q'(\rho_-) > k > Q'(\rho_+)).$$

3.1.2 МОДЕЛЬ ТАНАКА

Приведем один из способов определения зависимости $V(\rho)$, предложенный в 1963 г. Танака и др. [14].

Рассматривается однопослосный поток АТС. Пусть скорость АТС не может превышать $v_{\max}$. Плотность $\rho(v) = 1/d(v)$, где $d(v) = L + c_1 v + c_2 v^2$ - среднее (безопасное) расстояние между АТС при заданной скорости v движения потока ($d(v)$ также называют *динамическим габаритом* или *дистанцией видимости*, и понимают под $d(v)$ - часть полосы, содержащую АТС вместе с дистанцией экстренного торможения), L - средняя длина АТС, c_1 - время, характеризующее реакцию водителей, c_2 - коэффициент пропорциональности тормозному пути. Из зависимости $d(v)$ можно получить зависимость (1) $V(\rho)$, удовлетворяющую условию (2).

Коэффициент c_2 , вообще говоря, зависит от дорожных условий. Так при нормальных условиях [14]

$$d(v)[м] = 5,7[м] + 0,504[с] \cdot v[м/с] + 0,0285[с^2/м] \cdot v^2[м^2/с^2],$$

для мокрого асфальта [15]

$$d(v)[м] = 5,7[м] + 0,504[с] \cdot v[м/с] + 0,0570[с^2/м] \cdot v^2[м^2/с^2],$$

а для обледенелой дороги [15]

$$d(v)[м] = 5,7[м] + 0,504[с] \cdot v[м/с] + 0,1650[с^2/м] \cdot v^2[м^2/с^2].$$

3.1.3 МОДЕЛЬ УИЗЕМА

Следующим шагом (упомянутым еще в 1955 г., и окончательно предложенным в 1974 г. Дж. Уиземом [5]) был учет “дальнозоркости” водителей:

$$v(t, x) = V(\rho(t, x)) - \frac{D(\rho(t, x))}{\rho(t, x)} \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x}, \quad D(\rho) > 0;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right). \quad (6)$$

Появившиеся в правых частях новые (по сравнению с (1) и (4)) диффузионные слагаемые соответствует тому факту, что водители снижают скорость при увеличении плотности машин впереди и увеличивают при уменьшении. Гидродинамическая (макроскопическая) модель (2), (5), (6) называется *моделью Уизема*.

В случае (Б. Гриншилдс (1934)), когда $Q(\rho)$ - парабола (вогнутая), $D(\rho) = \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) можно показать, что уравнение (4) сводится, с помощью замены переменных и неизвестной функции: $t \rightarrow \tilde{t}$, $x \rightarrow \tilde{x}$, $\rho \rightarrow \tilde{\rho}$, к уравнению Бюргерса (играющему важную роль в гидродинамике (см., например, работы Х. Пэйтмана (1915), Ж. Лерэ (1934), Дж. Бюргерса (1940), Е. Хопфа (1950)))

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{x}} = \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial \tilde{x}^2}, \quad \varepsilon > 0.$$

С помощью замены Флорина – Хопфа – Коула: $\tilde{\rho} = -2\varepsilon w_x / w$; задача (4), (5) (для уравнения Бюргерса) сводится к задаче Коши для уравнения теплопроводности⁶

$$w_t = \varepsilon w_{xx}, \quad w(0, x) = \exp \left(- \int_0^x \tilde{\rho}_0(\xi) d\xi / (2\varepsilon) \right).$$

⁶ Причина, по которой уравнение Бюргерса лианеризуется, объясняется в [16] и связана с тем, что уравнение Бюргерса достаточно симметрично (допускает бесконечномерную алгебру Ли (группу преобразований)). Интересно заметить, что есть определенная техника, позволяющая по заданному эволюционному уравнению определять лианеризуется ли оно или нет. Для более подробного ознакомления с групповым анализом дифференциальных уравнений можно рекомендовать монографии [17] и [18].

Используя этот факт, Е. Хопф в 1950 г. изучал поведение решения начальной задачи Коши для уравнения Бюргерса [5], [8]. Так, например, им был обоснован предельный переход (получивший название *метода исчезающей вязкости* (хотя в рассматриваемом нами случае речь идет скорее о диффузии, чем о вязкости)) при $\varepsilon \rightarrow 0+$ от уравнения Бюргерса к уравнению Хопфа

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{x}} = 0.$$

В связи с выше сказанным напомним, что для нелинейного закона сохранения (4) гладкое решение задачи Коши (4), (5) существует, как правило, только в малой окрестности линии, где заданы начальные условия. По разрывным начальным условиям решение задачи Коши для нелинейных уравнений, вообще говоря, не определяется однозначно даже в сколь угодно малой окрестности линии, где заданы начальные условия. Для того чтобы задача Коши для нелинейных уравнений с гладкими или разрывными начальными условиями была однозначно разрешима в большей области, необходимо рассматривать разрывные решения уравнения и по-новому ставить задачу Коши. Казалось бы, что достаточно (следуя идеям С.Л. Соболева в линейном случае) равенства (4), (5) понимать в слабом смысле (понимать (4) в смысле соотношения (3)). Однако (см. пример О.А. Олейник из п. 3.1.1) такое определение решения не обеспечивает его единственности. *Корректный способ заключается в том, чтобы понимать решения задачи Коши (4), (5) $\rho(t, x)$, как предел (почти всюду по x при любом фиксированном значении $t > 0$) при $\varepsilon \rightarrow 0+$, $D(\rho) := \varepsilon D(\rho)$, $D(\rho) > 0$ решений задач Коши (6), (5) $\rho_\varepsilon(t, x)$:*

$$\|\rho(t, \cdot) - \rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} = O(\sqrt{\varepsilon t}) \text{ (оценка Н.Н. Кузнецова (1975)).}$$

Это представляется естественным. Ведь оба уравнения (4) и (6) возникли (на разных уровнях детализации) при описании одного явления. Обоснованием метода исчезающей вязкости интенсивно занимались в 50-ые годы XX века (О.А. Олейник, А.Н. Тихонов и А.А. Самарский, П. Лакс, О.А. Ладыженская, И.М. Гельфанд и др.). Наиболее общие результаты получил С.Н. Кružков в конце 60-ых (подробности см. в [19] – [27]).

Заметим, что уравнение (6) параболического типа, следовательно, решение можно понимать в обычном (классическом смысле), даже при разрывных начальных условиях. Для таких нелинейных уравнений развит достаточно эффективный аппарат (различные варианты принципа максимума⁷ и основанные на нём методы априорных оценок старших производных (С.Н. Бернштейн, И.Г. Петровский, О.А. Олейник и др.) [28], [29] позволяющий довольно тонко исследовать различные свойства решений начально – краевых задач для уравнений параболического типа). Установив различные свойства решения задачи Коши (6), (5), и осуществив предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0+$, можно получать свойства решения задачи Коши (4), (5).

Посредством “хорошего” уравнения (6) попытаемся теперь установить связь между законом сохранения и уравнением Гамильтона – Якоби. Для этого рассмотрим две приводимые ниже задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho_\varepsilon)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 \rho_\varepsilon}{\partial x^2}, \\ \rho_\varepsilon(0, x) = \rho(0, x) \end{cases} \quad (7)$$

⁷ Решение уравнения параболического типа достигает максимального и минимального значения на параболической границе (основание и боковые стороны) области, в которой рассматривается это решение. Так, например, решение начальной задачи Коши для уравнения параболического типа ограничено теми же постоянными, что и начальное условие.

$$\begin{cases} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}\right) = \varepsilon \frac{\partial^2 U_\varepsilon}{\partial x^2} \\ U_\varepsilon(0, x) = \int_0^x \rho(0, y) dy \end{cases} \quad (8)$$

Как уже отмечалось, для следующей задачи Коши (в частности, для задачи Коши (7)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho_\varepsilon)}{\partial x} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\rho_\varepsilon) \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x} \right), \quad D(\rho_\varepsilon) > 0, \\ \rho_\varepsilon(0, x) &= \rho(0, x) \end{aligned}$$

существует почти всюду по x при любом фиксированном значении $t > 0$ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \rho_\varepsilon(t, x) = \rho(t, x)$. Причём $\rho(t, x)$ - ограниченная измеримая функция, не зависящая от $D(\rho_\varepsilon) > 0$, которая слабо удовлетворяет закону сохранения (4) и начальному условию (5). Так определённую функцию $\rho(t, x)$ также часто называют *энтропийным решением* задачи Коши (4), (5).

Используя схожую технику, можно показать, что существует почти всюду по x при любом фиксированном значении $t > 0$ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} U_\varepsilon(t, x) = U(t, x)$. Причём $U(t, x)$ - ограниченная непрерывная функция, которая слабо удовлетворяет *уравнению Гамильтона – Якоби*

$$\frac{\partial U}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0 \quad (9)$$

и начальному условию

$$U(0, x) = U_0(x) = \int_0^x \rho(0, y) dy. \quad (10)$$

Так определённую функцию $U(t, x)$ называют *вязкостным решением* задачи Коши (9), (10).⁸ Поскольку решения задач (7) и (8) классические, то имеет место следующая формула

$$\rho_\varepsilon(t, x) = \partial U_\varepsilon(t, x) / \partial x.$$

Из того, что почти всюду по x при любом фиксированном значении $t > 0$ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \rho_\varepsilon(t, x) = \rho(t, x)$ следует, что почти всюду по x при любом фиксированном значении

⁸ Рассмотрим следующую задачу оптимального управления (см., например, [30]):

$$J(t, x; u(\cdot)) = \int_{t_0}^t L(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + \varphi(t_0, x_0), \quad \dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau)), \quad u(\tau) \in M, \quad x(t) = x.$$

Положим функцию цены $U(t, x)$ равной

$$U(t, x) = \inf_{u(\cdot) \in M} J(t, x; u(\cdot)), \quad U(t_0, x) = \varphi(t_0, x).$$

Тогда справедлива следующая теорема (см., например, [С. 472–481, 31]).

Теорема. $U(t, x)$ является вязкостным решением начальной задачи Коши для прямого уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана (Γ – Я – Б)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sup_{u \in M} \left\{ \left\langle \frac{\partial U}{\partial x}, f(t, x, u) \right\rangle - L(t, x, u) \right\} = \frac{\partial U}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0, \quad U(t_0, x) = \varphi(t_0, x).$$

Приведенная теорема, наряду с принципом максимума Понтрягина, является основной в теории оптимального управления. Причём, из этой теоремы мы получаем управления в форме синтеза $u(t, x)$, а не в программном виде $u(\tau)$, как в принципе максимума, что более удобно для приложений.

$t > 0 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \partial U_\varepsilon(t, x) / \partial x = \rho(t, x)$. В случае выпуклой (вогнутой) функции $Q(\rho)$ или $U_0(x)$ установлено, что почти всюду по x при любом фиксированном $t > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \partial U_\varepsilon(t, x) / \partial x = \partial U(t, x) / \partial x = \rho(t, x). \quad (11)$$

Используя теорему Демьянова – Данскина⁹ о дифференцировании под знаком супремума, можно проверить,¹⁰ что для вязкостного решения $U(t, x)$ справедливы следующие формулы, встречававшиеся в работах Е. Хопфа (1965), которые принято поэтому называть *формулами Хопфа* (аналогичные формулы возникали ранее, например, в работах О.А. Олейник и П. Лакса; приблизительно в то же время, что и Е. Хопф, эти формулы использовал С.Н. Кружков; близкие идеи “о сведении решения задачи Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения или для нелинейного уравнения в частных производных к решению задачи(-ач) оптимизации” предлагались в 1965 г. (и ранее) Р. Беллманом и Р. Калабой [36]):

1) Пусть $U_0(x)$ - выпуклая функция, тогда

$$U(t, x) = \sup_{s \in \mathbb{R}} [sx - Q(s)t - U_0^*(s)],$$

где $U_0^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} [sx - U_0(x)]$;

2) Пусть $Q(\rho)$ - вогнутая функция, тогда

$$U(t, x) = \inf_{f \in \mathbb{R}} [U_0(x - tf) - Q^*(f)t],$$

где $Q^*(f) = \sup_{s \in \mathbb{R}} [Q(s) - sf]$. Аналогичные формулы можно выписать и для выпуклой функции $Q(\rho)$ или вогнутой функции $U_0(x)$.

Используя теорему Демьянова – Данскина и соотношение (11), можно также получить и формулы для энтропийного решения задачи Коши (4), (5) $\rho(t, x)$ (заметим, что формула, полученная из 2), называется *формулой Лакса – Олейник* [глава 3, 31]). Упомянутые здесь формулы использовались, например, при исследованиях задач п. 3.3. В частности, С.Н. Кружков и Н.С. Петросян в 1982 г. получили доказательство утверждения очень близкого к теореме 1 п. 3.3.1 исходя из формулы 1).

⁹ См. [§ 3, § 10, 32], [С. 295–297, 33] (формулы Хопфа см. там же [пп. 10.1–10.3 главы 6, 33]). Необходимые для понимания факты выпуклого анализа имеются, например, в книгах [34], [35].

¹⁰ Проверим формулу из 1). Для этого сразу заметим (в виду выпуклости $U_0(x)$), что

$$U(0, x) = U_0^{**}(x) = U_0(x) \text{ (теорема Фенхеля – Моро [34])}.$$

По теореме Демьянова – Данскина

$$\partial U(t, x) / \partial t = -Q(s(t, x)), \quad \partial U(t, x) / \partial x (= \rho(t, x)) = s(t, x), \text{ где } s(t, x) \in \arg \sup_{s \in \mathbb{R}} [sx - Q(s)t - U_0^*(s)], \text{ откуда}$$

$$\partial U(t, x) / \partial t + Q(\partial U(t, x) / \partial x) = -Q(s(t, x)) + Q(s(t, x)) = 0.$$

Для наглядности считаем, что супремум достигается в одной единственной точке (поэтому написано $\arg$, а не Arg). Можно показать, что супремум достигается не в одной точке тогда и только тогда, когда в этой точке функция $\rho(t, x) = s(t, x)$ терпит разрыв. Собственно, формула

$$\rho(t, x) = s(t, x) = \text{Arg} \sup_{s \in \mathbb{R}} [sx - Q(s)t - U_0^*(s)]$$

дает энтропийное решение задачи (4), (5) в случае неубывающей начальной функции $\rho(0, x)$, если под $\rho(t, x)$ договориться понимать многозначную функцию, которая принимает в точках разрыва всевозможные значения из отрезка, соответствующего скачку разрыва.

В заключение этого параграфа, в котором мы пояснили, что понимается под решением задачи Коши (4), (5), приведем, следуя монографии [26], оценку устойчивости¹¹ решения $\rho(t, x; \rho(0, x), Q(\rho))$ задачи Коши для закона сохранения (4) с начальной функцией $\rho(0, x)$ и с функцией потока $Q(\rho)$ по $\rho(0, \cdot)$ и $Q(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \|\rho(t, \cdot; \rho_1(0, x), Q_1(\rho)) - \rho(t, \cdot; \rho_2(0, x), Q_2(\rho))\|_{L_1(\mathbb{R})} &\leq \|\rho_1(0, \cdot) - \rho_2(0, \cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} + \\ &+ t \min\{T.V.(\rho_1(0, \cdot)), T.V.(\rho_2(0, \cdot))\} \|Q_1(\cdot) - Q_2(\cdot)\|_{Lip}, \end{aligned}$$

где T.V. - total variance (полная вариация), а

$$\|Q_1(\cdot) - Q_2(\cdot)\|_{Lip} \stackrel{def}{=} \sup_{\tilde{\rho} \neq \rho} \left| \frac{Q_1(\tilde{\rho}) - Q_2(\rho)}{\tilde{\rho} - \rho} \right|.$$

3.1.4 Модель Пэйна и её обобщения

Важным шагом стала *модель Пэйна (1971)* [5]. Эту модель можно понимать, как закон сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial x} = 0,$$

в котором уже не предполагается зависимость скорости от плотности (уже не предполагается, что желаемая скорость устанавливается мгновенно). А для скорости выписывается уравнение стремления реальной скорости v к желаемой скорости

$$V(\rho) - (D(\rho)/\rho) \partial \rho / \partial x,$$

причём τ ($\tau \sim 1$ сек.) - характеризует скорость стремления (в электротехнической терминологии τ - время релаксации)

$$\frac{d}{dt} v = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\tau} \left(v - \left(V(\rho) - \frac{D(\rho)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \right).$$

Полученную систему уравнений запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & \rho \\ D/\rho & v \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} 0 \\ V - v \end{pmatrix}, \quad (12)$$

из которого легко следует строгая гиперболичность этой системы (матрица при $\partial/\partial x$ имеет различные вещественные собственные значения).¹² Заметим [19], что уже для системы двух законов сохранения (система Х. Пэйна (12) как раз представляет пример такой системы, причём имеется ещё и нелинейная правая часть) в общем случае неизвестно, как корректно определять глобальное по времени обобщенное решение. Метод исчезающей вязкости для систем оказывается уже чувствительным к выбору положительно определённой матрицы $D(\rho)$ в правой части [11]. Тем не менее, для строго

¹¹ Отметим, что приводимая ниже оценка (при $Q_1(\rho) = Q_2(\rho)$) следует из аналогичной оценки устойчивости по начальным данным решения задачи Коши для уравнения (6), которая, в свою очередь, является следствием принципа максимума для параболических уравнений. Эта оценка (для уравнения (6)) обеспечивает единственность (с точностью до почти всюду) энтропийного решения задачи Коши (4), (5). Обратим также внимание на равномерность по времени оценки устойчивости по начальным данным.

¹² Интересно заметить следующий, достаточно общий, факт: основное отличие гидродинамических моделей транспортных потоков от соответствующих гидродинамических аналогов заключается в правых частях, возникающих, как правило, гиперболических (строго) систем уравнений и их диффузионных аналогов. Что представляется естественным. Ведь “транспортная жидкость” – эта жидкость с мотивацией, которая и присутствует в правой части. Это замечание позволяет использовать в расчетах по гидродинамическим моделям транспортных потоков хорошо разработанные за более чем полвека вычислительные алгоритмы (схемы П. Лакса, С.К. Годунова, Магомедова – Холодова и др.), см., например, [11], [37], [38], [39] и цитированную там литературу.

гиперболической систем законов сохранения с одной пространственной переменной за последние 15 лет был достигнут определённый прогресс (см. [21] – [27]): в общем случае построена¹³ глобальная теория существования, единственности и устойчивости для начальных данных близких к константе (имеющих малую полную вариацию).

Желание “размазать разрывы решений” привело от модели Лайтхилла – Уизема – Ричардса к модели Уизема. Это же желание мотивировало и введение в модель Пэйна диффузионные поправки.¹⁴ На таком пути получают новые модели: Р. Кюна (1993), Кернера – Конхойзера (1994) и др.. В [40] приведен достаточно подробный обзор литературы (более 100 моделей). Здесь мы лишь упомянем некоторые подходы российских ученых (в которых обобщается подход Х. Пэйна): Н.Н. Смирнова, А.Б. Киселёва, В.Ф. Никитина, М.В. Юмашева (МГУ) [41], [42]; Я.А. Холодова, А.С. Холодова, И.И. Морозова (МФТИ) [43].

3.1.5 КИНЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Продолжая аналогию с газовой динамикой, И. Пригожин и Р. Херман в 1961 г. (а затем С. Павери-Фонтана 1975 г., Д. Хельбинг¹⁵ 1995 г. и др.) предложили описывать транспортный поток кинетическим уравнением (типа Больцмана с “интегралом взаимодействия АТС” вместо “интеграла столкновения частиц газа”) [39], [40].

Из кинетических моделей транспортного потока (в том числе и многополосных) можно получать макроскопические (гидродинамические) модели подобно тому, как в кинетической теории получаются уравнения газовой динамики (гидродинамики) – т.е. с помощью умножения на различные функции от скорости и последующего интегрирования по скоростям кинетического уравнения для плотности в расширенном (на скорости) фазовом пространстве $(t; x; v)$.

Имеются модели промежуточные между кинетическими и гидродинамическими моделями – так называемые, *мезоскопические* (такой моделью двухполосного движения пользуется, например, коллектив, возглавляемый Б.Н. Четверушкиным [44], [45]).

3.1.6 СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Интересные идеи исследования многополосности (которые также объясняют экспериментальную “размазанность” фундаментальной диаграммы) недавно были предложены А.П. Буслаевым и др. (МАДИ) [46]. Для описания транспортного потока использовалась модель Танака, в которую помимо плотности и скорости еще вводился «параметр регулярности», с помощью которого “часть водителей АТС «разрыхляет регулярное движение» для того, чтобы осуществить относительное перемещение внутри потока”.

3.1.7 ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МОДЕЛЕЙ

Несмотря на элементарность, модель Лайтхилла – Уизема – Ричардса (а также ее дифференциально – разностные и разностные аналоги) достаточно популярна в прикладных расчетах. Во многом это связано с недостаточным объемом данных, для использования моделей более высокого уровня (поправки, привносимые более тонкими

¹³ Разными способами, в том числе и с помощью метода исчезающей вязкости: $\varepsilon \rightarrow 0+$, $D(\rho) := \varepsilon I$, где $I = \text{diag}\{1, \dots, 1\}$ – единичная матрица (с единицами на диагонали и нулями на других позициях).

¹⁴ Заметим, что вводя в правую часть системы диффузионные (дисперсионные) поправки мы, как правило, решаем вопрос о том, что мы понимаем под решением [38] (иначе говоря, для корректной (и адекватной “физике процесса”) постановки начальной задачи Коши для системы законов сохранения, важно знать “как эта система была приготовлена”, откуда и как она возникла: что огрубили, чем пренебрегли и т.д.).

¹⁵ Правильнее говорить “Хельбина”, но “Хельбинга” уже устоялось в отечественной литературе [39].

моделями, нивелируются неточностью данных). Ряд современных коллективов исследователей сосредотачивается на решении начально – краевых задач для уравнения (4) на графе транспортной сети. Основные сложности при этом возникают при постановке краевых условий в узлах графа транспортной сети (см., например, [47], [48]). Модель Лайтхилла – Уизема - Ричардса (точнее ее разностные аналоги) хорошо подходит и для управления транспортными потоками. В подтверждение этих слов приведем некоторые идеи, использованные в подходе Калифорнийской школы [49] (возглавляемой А.Б. Куржанским) к управлению дорожным движением.

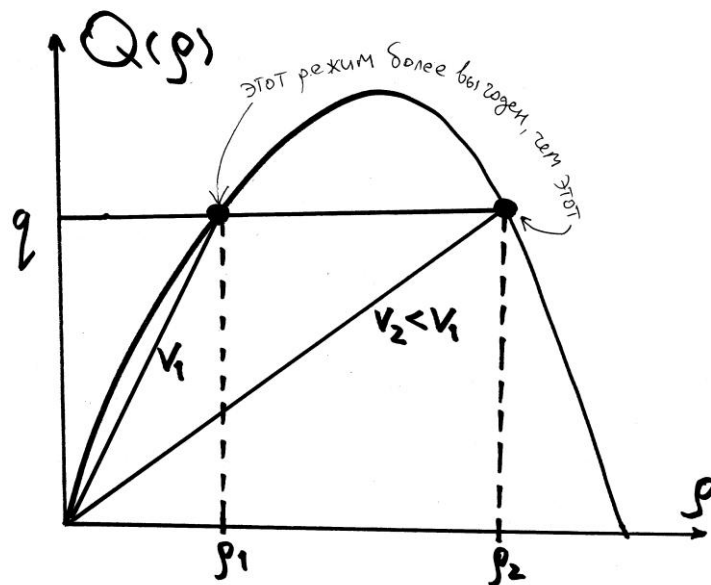


Рис. 7



Рис. 8

Из фундаментальной диаграммы следует, что одному и тому же значению потока АТС соответствуют разные (как правило, две) плотности и, как следствие, разные скорости. Очевидно, что более выгодным режимом является режим с большей скоростью (см. рис. 7): потоки будут удовлетворены в том же количестве, однако среднее время

движения снизится, поскольку движение будет проходить при больших скоростях (и, как следствие, с меньшими плотностями). Задача управления (скажем, светофорами или въездами на основные магистрали) заключается в том, чтобы большую часть времени среднестатистический водитель проводил именно в таких режимах. Исходя из *модели клеточных автоматов* [50], [51] (СТМ – Cell Transmission Model) К. Дангазо = схема Годунова (1959) для (4) + треугольная фундаментальная диаграмма (см. рис. 8), был предложен способ “оптимального управления” светофорами и въездами на магистрали, а также способ “оптимального разрыхления” однородного потока АТС на магистрали (с помощью светофоров) с целью уменьшения среднего времени в пути.

Упражнение.** Интересно было бы аналитически на модельных задачах объяснить, например, что грамотное разрыхление плотного потока на магистрали светофорами, действительно ведет к уменьшению (которое хотелось бы оценить) среднего времени в пути).

Несмотря на то, что с момента появления первых фундаментальных работ прошло более полувека, по мнению ряда ведущих специалистов в области математического моделирования дорожного движения (К. Нагель, Х. Махмасани, М. Шрекенберг и др.), проблема образования предзаторных и заторных ситуаций еще до конца не изучена. Используя терминологию, предложенную Б. Кернером [52], можно сказать, что на текущий момент нет общепринятого подхода, описывающего поведение АТС в области “синхронизированного потока” (иначе говоря, если поток АТС уподобляется жидкости, то наиболее сложная для моделирования ситуация – это “замерзающая жидкость”). Подтверждением вышесказанному может служить тот факт, что разные коллективы, занимающиеся моделированием транспортных потоков, как правило, используют разные модели: начиная от модели Лайтхилла – Уизема - Ричардса (М. Гаравелло и Б. Пиколи, А.Б. Куржанский и др.), заканчивая моделями, в которых каждый водитель описывается своим вариационным принципом (И.А. Лубашевский и др. [53]). Отметим также, что большое количество исследований сосредотачивается на изучении транспортного потока на отдельном прямолинейном участке транспортной сети с простейшими начально – краевыми условиями. В то время как причиной заторов (согласно К. Дангазо) часто являются «узкие места» (перекрестки, въезды). Поэтому особенно важно (для приложений) создать целостную модель транспортных потоков, адекватную имеющимся данным, включающую в себя описание источников, стоков АТС и поведение АТС в вершинах графа транспортной сети (перекрестки, въезды, съезды и т.п.).

3.2 МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В п. 3.2 планируется рассказать об основных подходах к *микроскопическому* моделированию движения однополосных транспортных потоков (в основе которого лежит концепция “о желании придерживаться при движении безопасной дистанции до лидера”), и о связях, имеющихсЯ между микроскопическими и макроскопическими моделями. Прежде всего, будут описаны модели *оптимальной скорости* и *следования за лидером*. Также будет описана одна из наиболее популярных моделей (за последние десять лет) – *модель разумного водителя Трайбера*. В заключение этого пункта будут приведены модели *клеточных автоматов* (которые часто являются, по-сути, разностными аналогами определенных макроскопических моделей), востребованные в приложениях.

3.2.1 МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОЙ СКОРОСТИ НЬЮЭЛЛА

Пусть АТС в однополосном потоке пронумерованы слева направо. Обозначим через $s_n(t)$ - координату центра n -го АТС в момент времени $t \geq 0$. Положим

$$h_n(t) = s_{n+1}(t) - s_n(t), \quad v_n(t) = s'_n(t).$$

В микроскопической *модели Ньюэлла* (эта модель была предложена в 1961 г. и является одной из первых *моделей оптимальной скорости* [5], [54]) постулируется, что (для каждого водителя существует “безопасная” скорость движения, зависящая от дистанции до лидера)

$$s'_n(t + \tau)(= v_n(t + \tau)) = V(1/h_n(t)), \quad V'(\rho) < 0,$$

где τ - время, характеризующее реакцию водителей.¹⁶

Микроскопическая модель

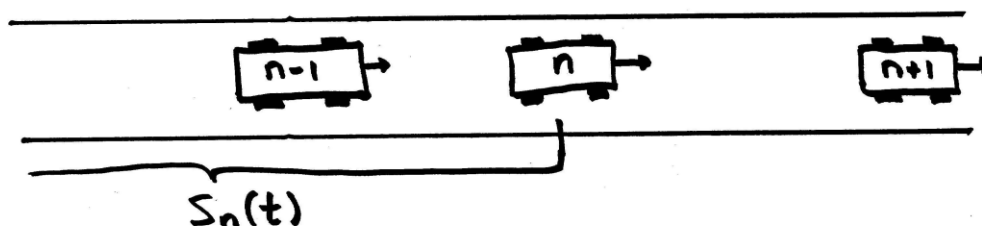


Рис. 9

¹⁶ Заметим, что по поведению графика зависимости функции потока $Q(\rho) = \rho \cdot V(\rho)$ от плотности ρ в окрестности $\rho_{\max}$ (максимально возможное значение плотности также часто обозначается, как ρ_j (см., например, [5])) можно определить τ , если известна средняя длина АТС L [5] ($L \sim 5,7$ м):

$$\tau = -L/Q'(\rho_{\max}) \quad (\tau \sim 0,4 \text{ сек. для рис. 2}).$$

Введём функции двух переменных $h(t, x)$, $\rho(t, x) = 1/h(t, x)$, $v(t, x)$, задав их значения в полуплоскости $t \geq 0$ на счётном наборе кривых, согласно формулам:

$$h(t, (s_n(t) + s_{n+1}(t))/2) = h_n(t), \quad v(t, s_n(t)) = v_n(t).$$

Считая $h_n(t)$ и τ - малыми величинами и учитывая, что

$$v(t + \tau, s_n(t + \tau)) = V(\rho(t, s_n(t) + 1/2 h_n(t))),$$

$$\frac{d}{dt} h(t, s_n(t) + 1/2 h_n(t)) = v(t, s_{n+1}(t)) - v(t, s_n(t)),$$

получим

$$v(t, s_n(t)) + (v_t(t, s_n(t)) + v(t, s_n(t))v_x(t, s_n(t)))\tau \simeq$$

$$\simeq V(\rho(t, s_n(t))) + V'(\rho(t, s_n(t)))\rho_x(t, s_n(t))(1/2)h(t, s_n(t)),$$

$$h_t(t, s_n(t)) + v(t, s_n(t))h_x(t, s_n(t)) \simeq v_x(t, s_n(t))h(t, s_n(t)).$$

Умножая второе уравнение на $-\rho^2$ и опуская у функций аргументы (продолжая “по непрерывности” $\rho(t, x)$ и $v(t, x)$ с счетного набора близких кривых на полуплоскость $t \geq 0$) приходим к системе:

$$v + (v_t + vv_x)\tau \simeq V(\rho) + \frac{V'(\rho)}{2\rho}\rho_x,$$

$$\rho_t + (v\rho)_x \simeq 0.$$

Таким образом, мы “вывели”, следуя [5], модель Пэйна, получив новую интерпретацию для τ и $D(\rho) = -V'(\rho)/2$. Если бы мы с самого начала полагали $\tau = 0$, то в результате выполнения указанных выше операций пришли бы к модели Уизема. А если бы еще пренебрегли слагаемым $V'(\rho)\rho_x(1/2)h$ в сравнении с $V(\rho)$ (напомним, что мы считаем h - малым), то получили бы модель Лайтхилла – Уизема - Ричардса.

Использованный выше прием называют **автомодельной редукцией**. Хорошим примером автомодельной редукции является вывод Д’Аламбером (1780) волнового уравнения исходя из модели колебания струны (с закрепленными концами), состоящей из множества одинаковых шариков (известной массы), соединенных одинаковыми пружинками (известной длины и жесткости), имеющими нулевую массу. Поведение каждого шарика описывается вторым законом Ньютона (для отклонения шарика от положения равновесия u) и зависит (посредством закона Гука) только от положений соседних шариков. Таким образом, получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, из которой с помощью предельного перехода (шарики выбираются все меньше и меньше, пружинки, соединяющие шарики, становятся все меньше и меньше) получается одно уравнение в частных производных – волновое уравнение, описывающее колебание струны. Другой, более современный (середина 50-ых годов XX века), пример автомодельной редукции: задача Ферми – Паста – Улама (уравнение Кортевега – де Фриза) - см. [55] и цитированную там литературу. Следует заметить, что приём автомодельной редукции (достаточно популярный в математической физике) является эвристическим (для приведенных выше выкладок это особенно

очевидно, если вспомнить, что, например, плотность может терпеть разрывы – и ни о каких оценках малости отбрасываемых членов ряда Тейлора не может идти и речи). В данной задаче при $\tau = 0$ частичная обоснованность (схожесть, причём равномерная по времени, в поведении решений (начальных задач), полученных по исходной модели Ньюэлла, и по моделям Лайтхилла – Уизема – Ричардса и Уизема) автомодельной редукции следует из результатов [11], [26], [56] – [75] (см. также п. 3.3.1).

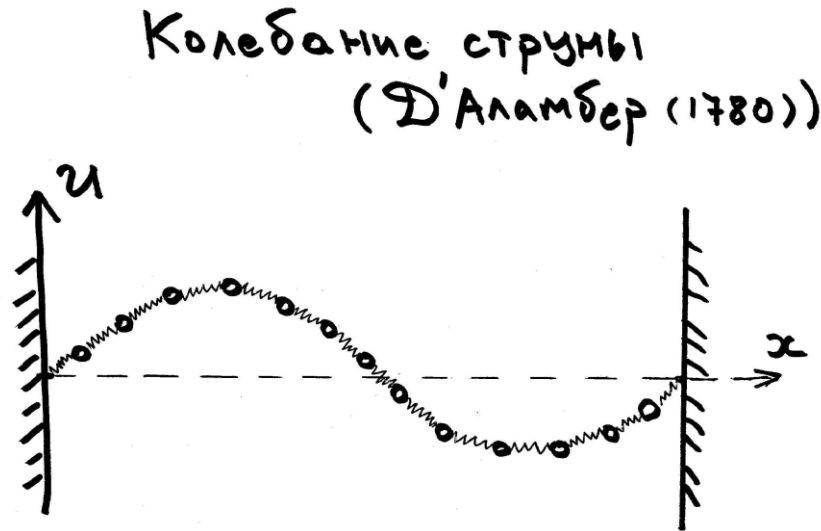


Рис.10

Пусть поток АТС однороден и стационарен: $\rho(t, x) \equiv \rho$, $v(t, x) \equiv V(\rho)$. Приведем, следуя [5], условие устойчивости в линейном приближении этого режима движения, считая, что транспортный поток описывается 1) моделью Ньюэлла; 2) моделью Пэйна с $D(\rho) = -V'(\rho)/2$. В обоих случаях ответ одинаков: $2\rho^2 |V'(\rho)| < 1$. Эта формула объясняет, почему при больших значениях плотности поток АТС становится неустойчивым и его трудно адекватно описывать.

Обратим также внимание на одно интересное обстоятельство. Оказывается, модель Ньюэлла при $\tau = 0$ соответствует хорошо известной среди экономистов (и подробно изученной) модели Полтеровича – Хенкина, описывающей распространение новых технологий [61] – [65], [68] – [70]. Для обнаружения соответствия, достаточно выписать, исходя из модели Ньюэлла, цепочку дифференциальных уравнений для скоростей $v_n(t)$. Если интерпретировать скорость $v_n(t)$ как функцию распределения $F_k(t)$ предприятий в отрасли производства по уровням эффективности $k = -n$, получим цепочку уравнений Полтеровича – Хенкина.

Заметим также, что модель Ньюэлла тесно связана со схемами бегущего счёта (Н.С. Бахвалова, Р.В. Разумейко, Н.Н. Кузнецова) и дивергентными схемами С.К. Годунова (см., например, [11], [26], [37], [38]). Но в отличие от разностных схем, в модели Ньюэлла время течёт непрерывно. Если же дискретизировать время по схеме Эйлера в этой модели, то получится разностная схема, принадлежащая упомянутым классам разностных схем, аппроксимирующая (причём устойчиво) закон сохранения.

3.2.2 МОДЕЛЬ СЛЕДОВАНИЯ ЗА ЛИДЕРОМ ДЖЕНЕРАЛ МОТОРС

Другим важным классом микроскопических моделей (наряду с моделями оптимальной скорости) являются *модели следования за лидером* [39], [40], [76].

В 1959 г. Д. Газис, Р. Херман, Р. Потс [40], [76] предложили одну из первых (первыми, по-видимому, были модели А. Рёшеля (1950) и Л. Пайпса (1953)) нетривиальных микроскопических моделей однополосного транспортного потока (обозначения те же, что и выше), с помощью которой можно получить фундаментальную диаграмму. Простейшим вариантом предложенной модели является:

$$s_n''(t) = \alpha \frac{s_{n+1}'(t) - s_n'(t)}{s_{n+1}(t) - s_n(t)}, \quad \alpha > 0.$$

Исходя из этой микроскопической модели (путём интегрирования), несложно получить экспериментальную формулу Х. Гринберга, полученную им также в 1959 г. по данным для туннеля Линкольна в Нью – Йорке

$$V(\rho) = \alpha \ln(\rho_{\max} / \rho),$$

где $\rho_{\max}$ - максимально допустимая плотность АТС.

В 1961 г. Д. Газис, Р. Херман и Р. Розэри предложили следующую модель [39], [76]:

$$s_n''(t + \tau) = \beta \frac{(s_n'(t + \tau))^{m_1}}{(s_{n+1}(t) - s_n(t))^{m_2}} (s_{n+1}'(t) - s_n'(t)), \quad \beta > 0,$$

где $m_1 (\neq 1)$, $m_2 (\neq 1)$ - эмпирически подбираемые константы ($m_1 \approx 0,8$ и $m_2 \approx 2,8$). Исходя из этой микроскопической модели (путём интегрирования), несложно получить уравнение состояния транспортного потока:

$$V(\rho) = V^0 \cdot \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^{m_2 - 1} \right]^{\frac{1}{1 - m_1}},$$

где V^0 - скорость свободного движения (желаемая скорость).

3.2.3 МОДЕЛЬ “РАЗУМНОГО ВОДИТЕЛЯ” ТРАЙБЕРА

Модели оптимальной скорости и следования за лидером можно объединить в одну общую *микроскопическую модель разумного водителя (Intelligent Driver Model (IDM))*:

$$s_n''(t) = F(s_{n+1}(t) - s_n(t), s_{n+1}'(t) - s_n'(t), s_n'(t)).$$

Как показали численные эксперименты, наиболее “удачной” моделью этого класса является *модель М. Трайбера*¹⁷ (1999) [40], [39], [77], [78] (калибровка и численные эксперименты с этой моделью показали, что ее свойства устойчивы к вариации параметров; модель демонстрирует реалистическое поведение при разгоне и торможении и воспроизводит основные наблюдаемые свойства однополосного транспортного потока):

$$s_n''(t) = a_n \cdot \left[1 - \left(\frac{s_n'(t)}{V_n^0} \right)^\delta - \left(\frac{d_n^*(s_n'(t), s_{n+1}'(t) - s_n'(t))}{s_{n+1}(t) - s_n(t)} \right)^2 \right].$$

¹⁷ Правильнее говорить “Трайба”, но “Трайбера” уже устоялось в отечественной литературе [39].

Первое слагаемое $a_n \cdot \left[1 - (s'_n(t)/V_n^0)^\delta\right]$ в правой части этого соотношения описывает динамику ускорения АТС на свободной дороге¹⁸, в то время как второе слагаемое описывает торможение из-за взаимодействия с *лидером* (впереди идущим АТС)¹⁹. Очевидно, что параметр δ отвечает за поведение при разгоне (при $\delta=1$ имеет место экспоненциальный по времени разгон, в пределе при $\delta \rightarrow \infty$ разгон происходит с постоянным “комфортным” ускорением a_n вплоть до достижения желаемой скорости V_n^0). Тормозящий член определяется отношением *желаемой дистанции* d_n^* (*безопасным расстоянием*) к фактической дистанции $s_{n+1}(t) - s_n(t)$, причем желаемая дистанция определяется следующим образом

$$d_n^*(s'_n(t), s'_{n+1}(t) - s'_n(t)) = d_n + T_n s'_n(t) + \frac{s'_n(t)(s'_{n+1}(t) - s'_n(t))}{2\sqrt{a_n b_n}},$$

где d_n - расстояние между АТС (n -ым и $n+1$ -ым) в заторе (естественно, что $d_n \geq L$, где $L \sim 5,7$ м - средняя длина АТС, и действительно, принято считать, что $d_n \sim 7,5$ м), b_n - ускорение “комфортного” торможения ($a_n \sim b_n \sim 2$ м/с²), T_n - аналог времени реакции водителя.

Заметим, что в правилах дорожного движения (ПДД) некоторых стран величина T_n достаточно жестко регламентирована (ограничена снизу ПДД). Так, например, в США от водителя требуют увеличивать безопасное расстояние (считается, что впереди идущее АТС имеет ту же скорость) на длину АТС L при увеличении скорости на 5 м/с (т.е. на 18 км/ч). Таким образом,

$$T_n \sim 5,7 [м] / 5 [м/с] \sim 1,1 \text{ сек.},$$

что хорошо согласуется с оценками этой величины, приведенными (см. п. 3.1.4) и полученными (см. п. 3.2.1) ранее.

В равновесном потоке одинаковых АТС, когда $s''_n(t) \equiv 0$, $s'_{n+1}(t) - s'_n(t) \equiv 0$ и $s'_n(t) \equiv V$:

$$d(V) \stackrel{\text{def}}{=} s_{n+1}(t) - s_n(t) = d^*(V, 0) \left[1 - (V/V^0)^\delta\right]^{-1/2}.$$

Из этого соотношения (считая, что $\rho(v) = 1/d(V)$) можно сначала построить уравнение состояния транспортного потока - зависимость $V(\rho)$, а потом фундаментальную диаграмму $Q(\rho)$. В пределе при $\delta \rightarrow \infty$ так построенная фундаментальная диаграмма будет стремиться к треугольной²⁰ (см. рис. 8)

$$Q(\rho) = \min\{\rho V^0, (1 - d\rho)/T\}.$$

¹⁸ Собственно, модель $s''_n(t) = a_n \cdot \left[1 - (s'_n(t)/V_n^0)^\delta\right]$ даже более естественно называть моделью оптимальной скорости, чем, скажем, модель Ньюэлла, которая скорее ближе к моделям следования за лидером.

¹⁹ Модель $s''_n(t) = a_n \cdot \left[1 - \left(\frac{d_n^*(s'_n(t), s'_{n+1}(t) - s'_n(t))}{(s_{n+1}(t) - s_n(t))^2}\right)\right]$ естественно называть моделью следования за лидером.

²⁰ В этой формуле вместо среднего расстояния между соседними АТС в заторе $d \sim 7,5$ м пишут также среднюю длину АТС $L \sim 5,7$ м (см., например, сноску 16).

А в частном случае, когда $\delta=1$, $d_n \sim 0$ м (отметим, что в этом случае адекватность модели в значительной степени сохраняется), можно найти и аналитическое выражение для равновесной скорости $V(\rho)$.

3.2.4 МОДЕЛИ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

3.3 МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

В заключительном п. 3.3 третьей главы будут приведены решения ряда *модельных задач*. Основная задача - это *задача об эволюции затора* (локального, глобального) в предположении, что транспортный поток описывается моделью Лайтхилла – Уизема – Ричардса, моделью Уизема, моделью Ньюэлла, моделью Пэйна. Будет определена *скорость распространения затора*. Заметим, что, как будет показано в этом пункте, информация о заторе, вообще говоря, может распространяться по транспортному потоку не только в виде одной (*бегущей, ударной*) волны, но и в виде *системы* таких волн, в которую могут также входить и *волны разрежения*. В заключение будет рассмотрена (путем решения ряда модельных задач об эволюции затора по модели Лайтхилла – Уизема - Ричардса) *задача Лайтхилла – Уизема (1955) о светофоре*: при каком соотношении между временами горения красного и зеленого сигнала светофора перед ним не будет скапливаться очередь?

3.3.1 ЭВОЛЮЦИИ ЗАТОРА В ТРАНСПОРТНОМ ПОТОКЕ, ОПИСЫВАЕМОМ МОДЕЛЯМИ ЛАЙТХИЛЛА – УИЗЕМА - РИЧАРДСА И УИЗЕМА

Для простоты изложения, будем везде в дальнейшем в этой части считать, что $Q(\rho)$ - полином (возможно, достаточно большой степени).

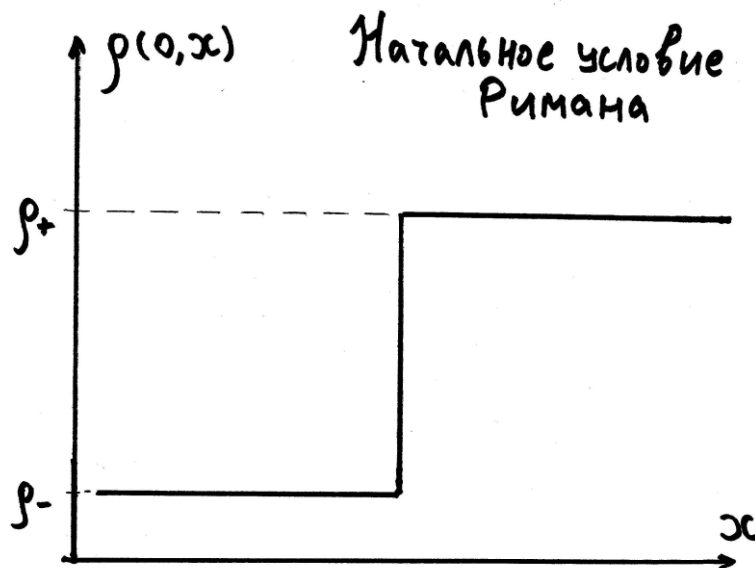


Рис. 11

Напомним необходимые соотношения (по модели Лайтхилла – Уизема - Ричардса):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\rho(0, x) = \begin{cases} \rho_-, & x < 0 \\ \rho_+, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{начальное условие Римана}), \quad (2)$$

$$\rho(0, x) = \begin{cases} \rho_-, & x < x_- \\ \rho_0(x), & x_- \leq x < x_+ \text{ (начальное условие типа Римана),} \\ \rho_+, & x \geq x_+ \end{cases} \quad (3)$$

где $\rho_0(x)$ - ограниченная измеримая функция (см. рис. 11, 12). Для определенности, будем считать в формулах (2), (3) $\rho_- < \rho_+$ (случай $\rho_- > \rho_+$ рассматривается аналогично, и может быть заменой $\rho \rightarrow -\rho$ сведен к случаю $\rho_- < \rho_+$ (с $Q(\rho) := Q(-\rho)$)).

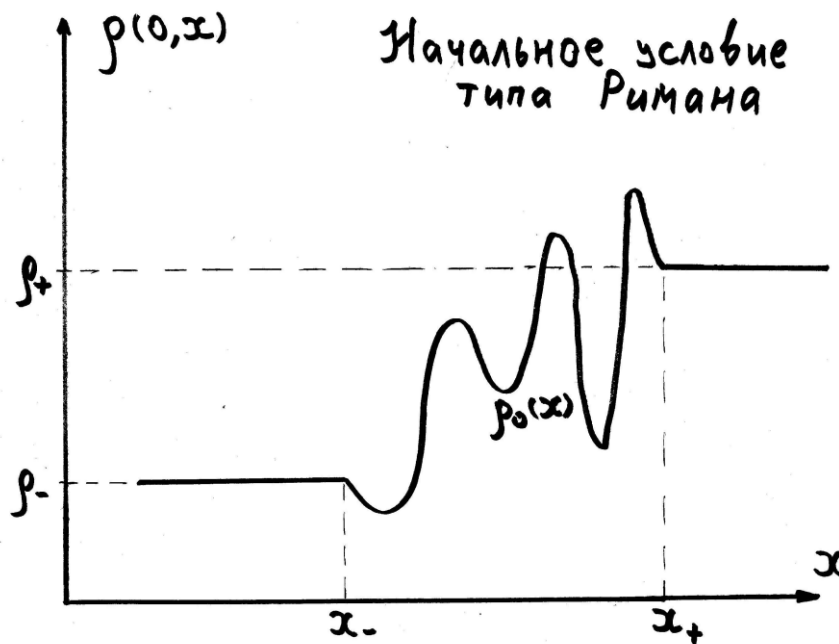


Рис. 12

Для того чтобы понять, какое решение будет иметь задача Коши (1), (2) (впрочем, частично ответ на этот вопрос мы уже можем дать, основываясь на примерах, разобранных в п. 3.1.1), заметим сначала, что:

- закон сохранения (1) имеет однопараметрическое ($x_0 \in \mathbb{R}$ - параметр) семейство **автомодельных решений**²¹ вида ударной волны (см. рис. 13)

²¹ По поводу автомодельных решений см., например, [79], [80], а также более ранние книги этих авторов. Грубо говоря, автомодельные решения – это решения рассматриваемого уравнения в частных производных, которые могут быть представлены как функции (в данном случае) одного аргумента, зависящего от пространственных и временных переменных (т.е. от t и x). Групповой анализ, указывает на то, что если автомодельные решения существуют, то, прежде всего, их следует искать в виде неизвестной функции от инвариантов (сконструированных из аргументов неизвестной функции (т.е. от t и x)) группы преобразований, допускаемой рассматриваемым уравнением. Поясним сказанное немного подробнее. Хорошо известно, что сфера, например, допускает группу ортогональных преобразований (всевозможных поворотов), т.е. сфера будет переходить сама в себя при таких преобразованиях. С другой стороны, на сферу можно смотреть, как на многообразие, заданное хорошо известным уравнением. Групповой анализ предлагает смотреть на уравнение в частных производных, как на многообразие заданное этим уравнением в продолженном (на различные частные производные) пространстве. Правда, в отличие от обычных многообразий, на класс возможных групп преобразований налагается условие, по сути, определяющее действие группы на продолженных переменных, через действие группы на неизвестную функцию и её аргументы.

В качестве примера укажем, что закон сохранения (1) допускает группу трансляций по неизвестной функции, по времени и по координате, группу подобных преобразований временной и пространственной

$$\tilde{\rho}(x-ct) = \begin{cases} \rho_-, & x < x_0 + ct \\ \rho_+, & x \geq x_0 + ct \end{cases}$$

тогда и только тогда, когда на разрыве этой ударной волны выполняется R – Н условие и Е – условие;

- закон сохранения (1) имеет однопараметрическое семейство автомодельных решений вида *волны разрежения*²² (см. рис. 14, на котором $x_0 = 0$)

$$g\left(\frac{x-x_0}{t}\right) = \begin{cases} \rho_-, & x < x_0 + Q'(\rho_-)t \\ Q'^{-1}\left(\frac{x-x_0}{t}\right), & x_0 + Q'(\rho_-)t \leq x < x_0 + Q'(\rho_+)t \\ \rho_+, & x \geq x_0 + Q'(\rho_+)t \end{cases}$$

тогда и только тогда, когда $Q''(\rho) > 0$ при $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$ (напомним, что $\rho_- < \rho_+$).

Зная приведенный выше (в этом параграфе) материал и тот материал, который был изложен в п. 3.1.1, И.М. Гельфанд в конце 50-ых годов XX века [10] построил (можно также добавить: “с помощью метода исчезающей вязкости” (см. п. 3.1.3), поскольку, как будет показано ниже в этом параграфе, выполнение R – Н условия и Е – условия на разрывах обобщенных решений уравнения (1) – есть прямое следствие этого метода) решение задачи о распаде произвольного разрыва, т.е. решение задачи Коши (1), (2).

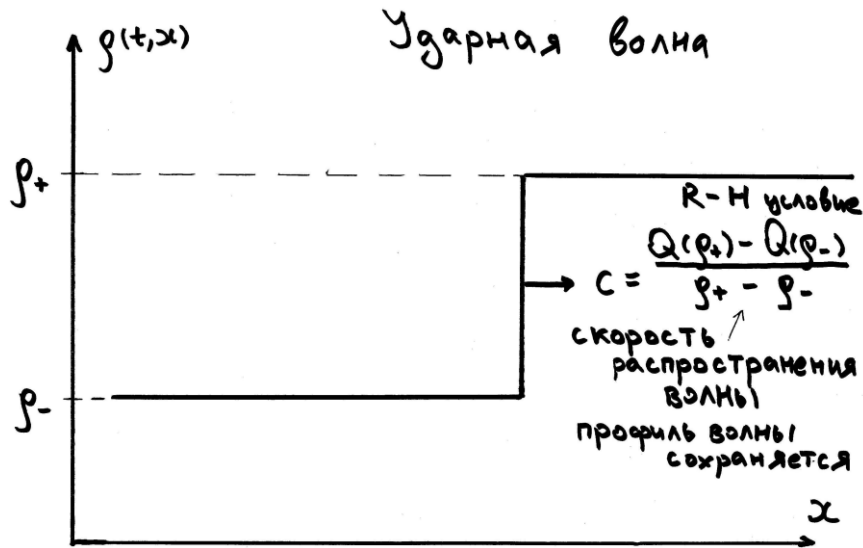


Рис. 13

переменной. Это означает, что вид уравнения (1) не поменяется при соответственно заменах: $\rho \rightarrow \rho + h$; $t \rightarrow t + \tau$; $x \rightarrow x + a$; $t \rightarrow kt$, $x \rightarrow kx$. Отсюда, поскольку $x - ct$ (при любом $c \in \mathbb{R}$) - является инвариантом группы трансляций: $t \rightarrow t + \tau$, $x \rightarrow x + c\tau$; а $\xi = x/t$ - является инвариантом группы растяжений: $t \rightarrow kt$, $x \rightarrow kx$; в частности, следует, что решение уравнения (1), прежде всего, следует попробовать искать в виде $\tilde{\rho}(x-ct)$ и $g(x/t)$.

Роль автомодельных решений (параметрических семейств таких решений) в теории эволюционных (эволюция по времени) уравнений в частных производных часто аналогична роли неподвижных точек в теории обыкновенных дифференциальных уравнений [1], [55] – [61], [64] – [75], [79], [81] – [84]. Так, например, параметрическое семейство автомодельных решений (или семейство, полученное путем “склеивания” автомодельных решений) часто является притягивающим (другие решения) семейством (см., теоремы 1, 2 в п. 3.3.1).

²² $Q'^{-1}(\cdot)$ - означает обратную функцию, к функции $Q'(\cdot)$.

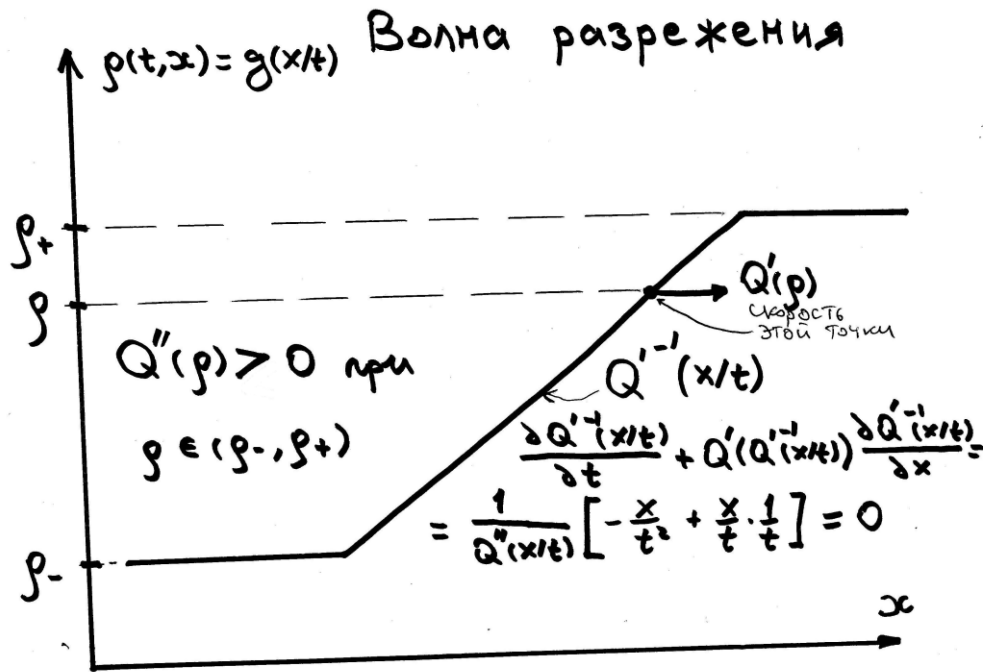


Рис. 14

Приведем способ построения решения (строгое обоснование см. в оригинальных, и отчасти монографических, записях курса лекций [20], которые С.Н. Кружков читал в конце 60-ых и начале 70-ых годов XX века на мехмате МГУ).²³ Для этого введем функцию

$$\tilde{Q}(\rho) = F^{**}(\rho), \quad F(\rho) = Q(\rho) + I_{[\rho_-, \rho_+]}(\rho), \quad I_{[\rho_-, \rho_+]}(\rho) = \begin{cases} 0, & \rho \in [\rho_-, \rho_+] \\ \infty, & \rho \notin [\rho_-, \rho_+] \end{cases},$$

где $F^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} (xy - F(y))$ - функция, сопряженная к $F(y)$ [34]. Таким образом, $\tilde{Q}(\rho)$ -

нижняя граница выпуклой оболочки множества $\{(\rho, q) : \rho \in [\rho_-, \rho_+], q \geq Q(\rho)\}$. Будем искать автомодельное решение уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{Q}(\rho)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

вида $\rho(t, x) := \rho(x/t)$ (заметим, что $\xi = x/t$ - является инвариантом группы растяжений: $x' \rightarrow kx$, $t' \rightarrow kt$, допускаемой законом сохранения (4)), удовлетворяющее начальному условию (2). Подстановка $\rho(x/t)$ в (4) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\rho'(\xi)(\xi - \tilde{Q}'(\rho)) = 0.$$

Откуда, с учетом начального условия (2), следует, что

²³ Для того чтобы убедиться в том, что построенная функция действительно является решением, достаточно (согласно сноске 4) проверить в точках гладкости этой функции выполнение соотношения (4), а на разрывах проверить выполнение R - H условия и E - условия. Если построенная функция будет удовлетворять всем этим условиям (а проверить это совсем несложно), то она и будет решением, причем единственным. В лекциях [20] доказан факт единственности. Таким образом, решение задачи Гельфанда (о распаде разрыва) было построено в [20] только исходя из того, что R - H условие и E - условие - являются необходимыми условиями на разрыве. Именно это утверждение (без достаточности) мы и докажем ниже в этом параграфе.

$$\rho(t, x) = \tilde{Q}'^{-1}(x/t) \quad (\tilde{Q}'^{-1}(\cdot) - \text{обратная функция к } \tilde{Q}'(\cdot)).$$

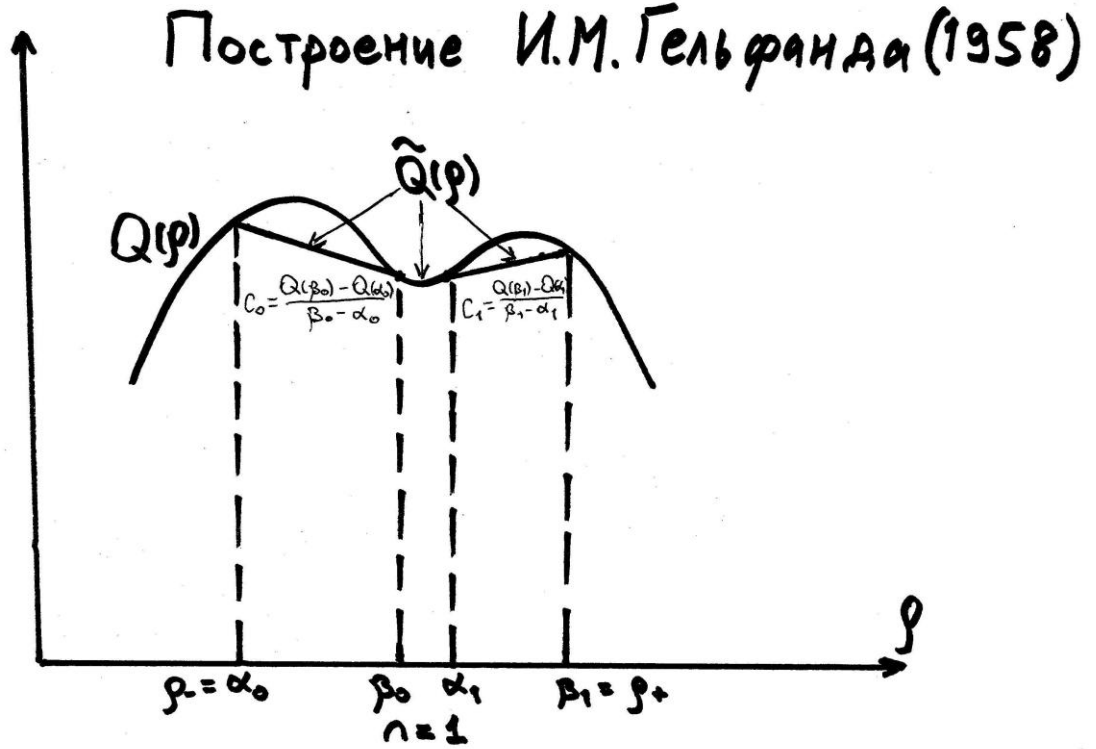


Рис. 15

Для уточнений и большей наглядности представим решение немного в другом виде. Положим (см. рис. 15)

$$\{\rho \in [\rho_-, \rho_+]: Q(\rho) > \tilde{Q}(\rho)\} = (\alpha_0, \beta_0) \cup (\alpha_1, \beta_1) \cup \dots \cup (\alpha_n, \beta_n),$$

$$c_0 = \tilde{Q}'(\alpha_0) = Q'(\beta_0), \quad c_n = Q'(\alpha_n) = \tilde{Q}'(\beta_n),$$

$$c_k = Q'(\alpha_k) = Q'(\beta_k) \quad (\text{очевидно, что } c_{k-1} \leq c_k), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

где $\rho_- = \alpha_0 \leq \beta_0 \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \dots < \beta_{n-1} \leq \alpha_n \leq \beta_n = \rho_+$. И будем считать (для простоты и наглядности формулировок), что выполняются условия²⁴ “отсутствия прилипания” [70]:

$$Q''(\rho) > 0 \quad \text{при } \rho \in [\beta_k, \alpha_{k+1}], \quad k = 0, \dots, n-1;$$

$$Q''(\alpha_0) > 0, \text{ если } \alpha_0 < \beta_0 \text{ и } Q'(\alpha_0) = c_0; \quad Q''(\beta_n) > 0, \text{ если } \alpha_n < \beta_n \text{ и } Q'(\beta_n) = c_n.$$

Тогда (см. рис. 16 с $d_k = 0$)

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \rho_-, & x < c_0 t \\ Q'^{-1}(x/t), & c_{k-1} t < x < c_k t, \quad k = 1, \dots, n. \\ \rho_+, & x > c_n t \end{cases} \quad (5)$$

²⁴ По построению мы можем быть уверены лишь в нестрогих неравенствах:

$$Q''(\rho) \geq 0 \quad \text{при } \rho \in [\beta_k, \alpha_{k+1}], \quad k = 0, \dots, n-1;$$

$$Q''(\alpha_0) \geq 0, \text{ если } \alpha_0 < \beta_0 \text{ и } Q'(\alpha_0) = c_0; \quad Q''(\beta_n) \geq 0, \text{ если } \alpha_n < \beta_n \text{ и } Q'(\beta_n) = c_n.$$

Если же условия “отсутствия прилипания” не выполняются, то все приводимые ниже результаты остаются в принципе верными (с некоторыми несущественными для приложений оговорками), но оценки будут менее точными (см. [74], [75] и цитированную там литературу). Заметим также, что неравенства $Q''(\alpha_0) > 0$ и $Q''(\beta_n) > 0$ нужны не для справедливости формулы (5), а для корректности приводимых ниже утверждений.

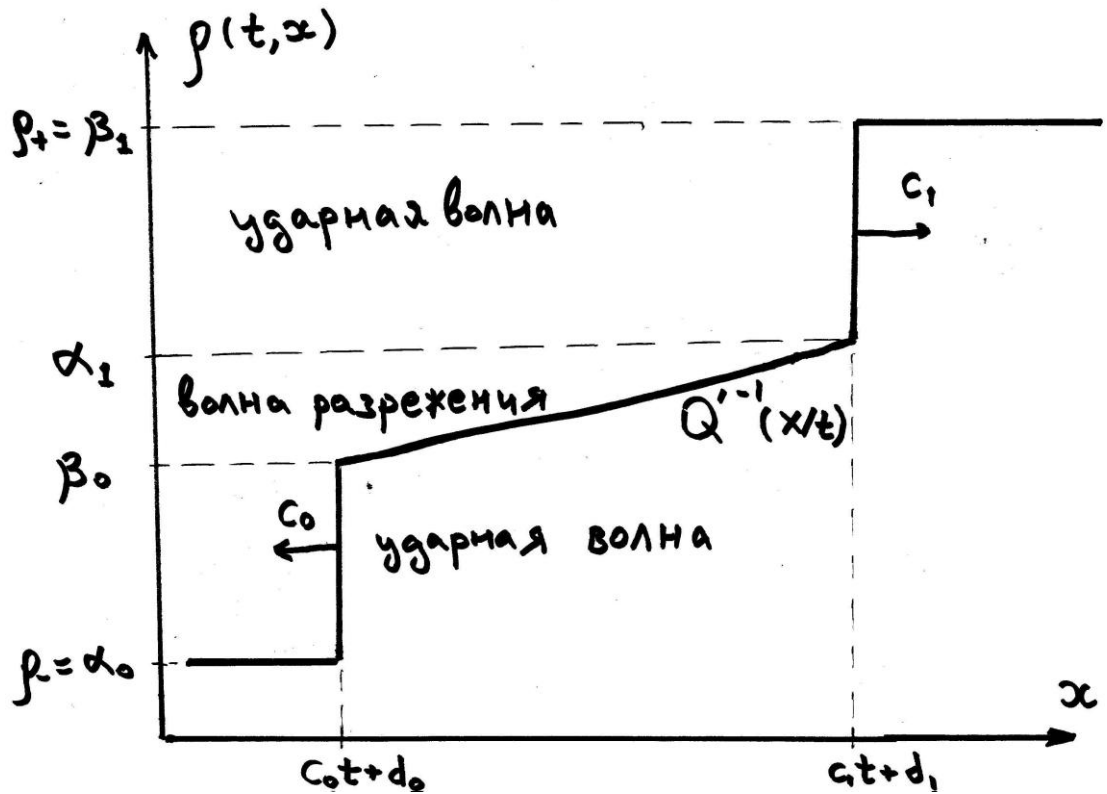


Рис. 16

Заметим, что $\rho(t, x)$ определяется с точностью до почти всюду по x при любом фиксированном значении $t \geq 0$ (см. п. 3.1.3). Поэтому в формуле (5) можно не доопределять значения $\rho(t, x)$ на разрывах. Естественно называть разрывы решения (5) *ударными волнами*, а $Q'^{-1}(x/t)$, $c_{k-1}t < x < c_k t$, $k = 1, \dots, n$ - *волнами разрежения* (волна разрежения исчезает, если $c_{k-1} = c_k$, поскольку в этом случае $\beta_{k-1} = \alpha_k$).

Естественно ожидать, что если немного “размазать разрыв” в начальных условиях (2), то решение уравнения (1) будет иметь схожий вид. Иначе говоря, мы ожидаем, что решение задачи Коши (1), (3) будет структурно похоже на (5). Действительно, имеет место следующий факт [56], [59], [60], [70], [75] (см. рис. 16).

Теорема 1. Существует такой набор $\{d_k\}_{k=0}^n$ (причем, если $c_{k-1} = c_k$, то $d_{k-1} \leq d_k$), что решение задачи Коши (1), (3) сходится при $t \rightarrow \infty$ в $L_1(\mathbb{R})$ к системе волн

$$\tilde{\rho}(t, x; \{d_k\}_{k=0}^n) = \begin{cases} \rho_-, & x < c_0 t + d_0 \\ Q'^{-1}(x/t), & c_{k-1} t + d_{k-1} < x < c_k t + d_k, \quad k = 1, \dots, n. \\ \rho_+, & x > c_n t + d_n \end{cases} \quad (6)$$

Заметим, что в работах [56], [59], [60] также были найдены формулы для расчета d_k .

Рассмотрим теперь модель Уизема

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right), \quad D(\rho) > 0 \quad (\varepsilon = 1). \quad (7)$$

“Построим” решение задачи Коши (7), (3). Поскольку задачи Коши (1), (3) и (7), (3) описывают одно и то же явление (на разных уровнях детализации) – эволюцию (“размазанного”) глобального затора по транспортному потоку, то мы вправе ожидать, что решение задачи Коши (7), (3) будет структурно похоже на решение задачи Коши (1), (3) и, стало быть, будет вести себя на больших временах подобно системе волн (6).

Действуя по тому же плану, что и при исследовании асимптотики (по времени) задачи Коши (1), (3), найдем сначала автомодельные решения уравнения (7). Согласно работам [10], [56]:

- закон сохранения с диффузией (7) имеет однопараметрическое ($x_0 \in \mathbb{R}$ – параметр) семейство автомодельных решений вида бегущей волны (см. рис. 17)

$$\tilde{\rho}_\varepsilon(x - ct + x_0)$$

таких, что

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \tilde{\rho}_\varepsilon(s) = \rho_-, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{\rho}_\varepsilon(s) = \rho_+,$$

тогда и только тогда, когда выполняется R – H условие

$$c = \frac{Q(\rho_+) - Q(\rho_-)}{\rho_+ - \rho_-}$$

и строгое E – условие (напомним, что $\rho_- < \rho_+$)

$$\forall \rho \in (\rho_-, \rho_+) \rightarrow \sigma(\rho_-, \rho_+) < \sigma(\rho_-, \rho);^{25}$$

- закон сохранения с диффузией (7) имеет однопараметрическое семейство асимптотически автомодельных решений²⁶ вида волны разрежения

$$g\left(\frac{x - x_0}{t}\right) = \begin{cases} \rho_-, & x < x_0 + Q'(\rho_-)t \\ Q'^{-1}\left(\frac{x - x_0}{t}\right), & x_0 + Q'(\rho_-)t \leq x < x_0 + Q'(\rho_+)t \\ \rho_+, & x \geq x_0 + Q'(\rho_+)t \end{cases}$$

тогда и только тогда, когда $Q''(\rho) > 0$ при $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$ (напомним, что $\rho_- < \rho_+$).

²⁵ Заметим, что для доказательства всех приведенных утверждений относительно бегущей волны достаточно рассмотреть краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными, которое получается при подстановке $\tilde{\rho}_\varepsilon(x - ct + x_0)$ в (7) и интегрировании возникшего уравнения с учетом одного из краевых условий $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tilde{\rho}_\varepsilon(s) = \rho_-$:

$$\frac{d\tilde{\rho}_\varepsilon(s)}{ds} = (Q(\tilde{\rho}_\varepsilon(s)) - c\tilde{\rho}_\varepsilon(s) - (Q(\rho_-) - c\rho_-)) / D'(\tilde{\rho}_\varepsilon(s)).$$

Заметим также, что R – H условие получается из оставшегося краевого условия $\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{\rho}_\varepsilon(s) = \rho_+$. А строгое E – условие – равносильно требованию отсутствия (за исключением $s = \pm\infty$) особых точек (точек в которых $\tilde{\rho}_\varepsilon'(s) = 0$) у этого обыкновенного дифференциального уравнения, что, в свою очередь, равносильно условию $\tilde{\rho}_\varepsilon'(s) > 0$ (поскольку $\rho_- < \rho_+$). Если же допустить существование особой точки $s^* \in (-\infty, \infty)$, то интеграл $\int (Q(\tilde{\rho}_\varepsilon) - c\tilde{\rho}_\varepsilon - (Q(\rho_-) - c\rho_-))^{-1} d\tilde{\rho}_\varepsilon$ будет иметь неинтегрируемую особенность в точке $\tilde{\rho}_\varepsilon = \tilde{\rho}_\varepsilon(s^*)$. Отсюда следует, что $s^* = \infty$ или $s^* = -\infty$. Пришли к противоречию с предположением $s^* \in (-\infty, \infty)$.

²⁶ При подстановке такого автомодельного “решения” в уравнение (7) возникает невязка (в нашем случае $O(1/t^2)$), которая стремится к нулю с ростом времени.

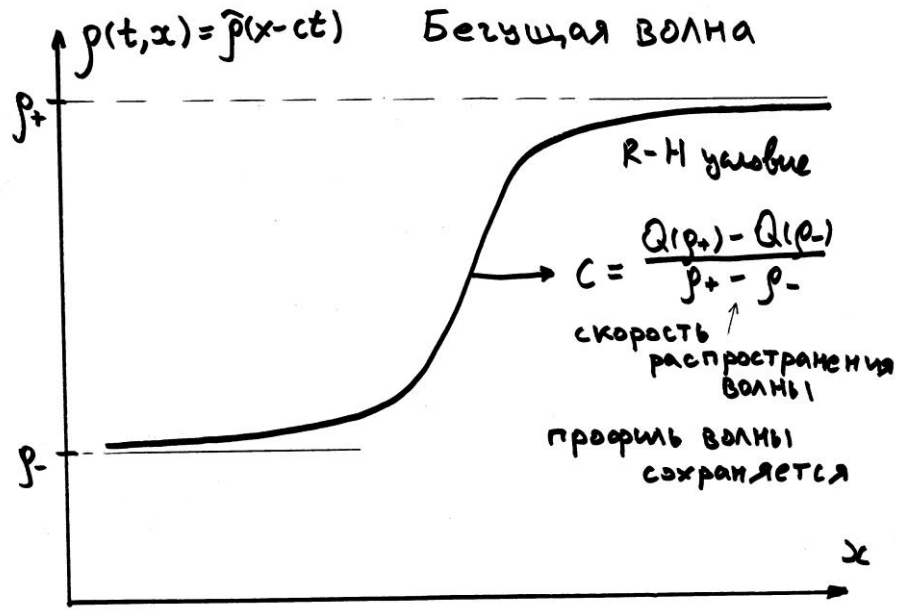


Рис. 17

Теперь можно объяснить уже анонсированную возможность обоснования R - H условия и E - условия на разрывах обобщенных решений уравнения (1) с помощью метода исчезающей вязкости:

$$\tilde{\rho}_\varepsilon(x - ct + x_0) = \tilde{\rho}_1\left(\frac{x - ct + x_0}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \begin{cases} \rho_-, & x \leq ct - x_0 \\ \rho_+, & x > ct - x_0 \end{cases}.$$

Упражнение (см. [12], [20]). Почему строгое E - условие “переходит в пределе” при $\varepsilon \rightarrow 0+$ просто в E - условие?

Имеет место следующий факт (для простоты формулировки (общий случай изложен в статье [74]) также считаем, что $c_{k-1} < c_k$, $k=1, \dots, n$ (или, что то же самое, $\beta_{k-1} < \alpha_k$, $k=1, \dots, n$)) [56], [58], [66] – [74] (см. рис. 18).

Теорема 2. Существует такой набор функций $\{d_k(t)\}_{k=0}^n = O(\ln t)$, что решение задачи Коши (7), (4) сходится при $t \rightarrow \infty$ в $L_\infty(\mathbb{R})$ (равномерно по $x \in \mathbb{R}$) к системе волн

$$\tilde{\rho}(t, x; \{d_k(t)\}_{k=0}^n) = \begin{cases} \rho_-, & x < c_0 t - \sqrt{t} \\ \tilde{\rho}^k(x - c_k t + d_k(t)), & c_k t - \sqrt{t} \leq x < c_k t + \sqrt{t}, \quad k=0, \dots, n \\ Q'^{-1}(x/t), & c_{k-1} t + \sqrt{t} \leq x < c_k t - \sqrt{t}, \quad k=1, \dots, n \\ \rho_+, & x \geq c_n t + \sqrt{t} \end{cases},$$

где $\tilde{\rho}^k(x - c_k t)$ - решение уравнения (7) вида бегущей волны с

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \tilde{\rho}^k(s) = \alpha_k, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{\rho}^k(s) = \beta_k.$$

Замечание (А.М. Ильина, О.А. Олейник (1960)). Можно показать (см. [56], [57], [71], [74]), что если $\rho_- = \alpha_0 < \beta_0 = \rho_+$ и $Q'(\alpha_0) \neq c_0$, $Q'(\beta_0) \neq c_0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} d_0(t) = d_0$, где d_0 находится из первого интеграла (7) (при $t=0$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\rho(t, x) - \tilde{\rho}^0(x - c_0 t + d_0)\} dx \equiv 0.$$

Замечание. Можно показать (см. [72] – [74]), что в теореме 2 скорость сходимости есть $O(1/\sqrt[3]{t})$. В теореме 1 (см. [22], [56], [59], [60]) скорость сходимости в равномерной норме (за вычетом сколь угодно малых, но фиксированных на момент рассмотрения, окрестностей ударных волн решения) есть $O(1/\sqrt{t})$.

Упражнение (см. сноску 6).** При каких условиях уравнение (7) лианеризуется? Попробуйте построить асимптотические ряды для $d_k(t)$ в этих (частных) случаях. Подобно тому, как это было сделано в работе [8] (см. также [5]) для уравнения Бюргерса (в случае общих начальных условий см. [67]).

Интересно также заметить, что все сказанное выше относительно модели Уизема в точности (та же структура асимптотики, те же самые скорости бегущих волн, та же асимптотика у сдвигов фаз $d_k(t) = O(\ln t)$) переносится и на модель Ньюэлла (подробности см. в [61] – [71]). Для модели же Пэйна получено (см., например, [5]) условие существования автомодельного решения вида “бегущей - ударной волны”. Оказывается, что скорость такой волны будет удовлетворять формуле $R - H$.

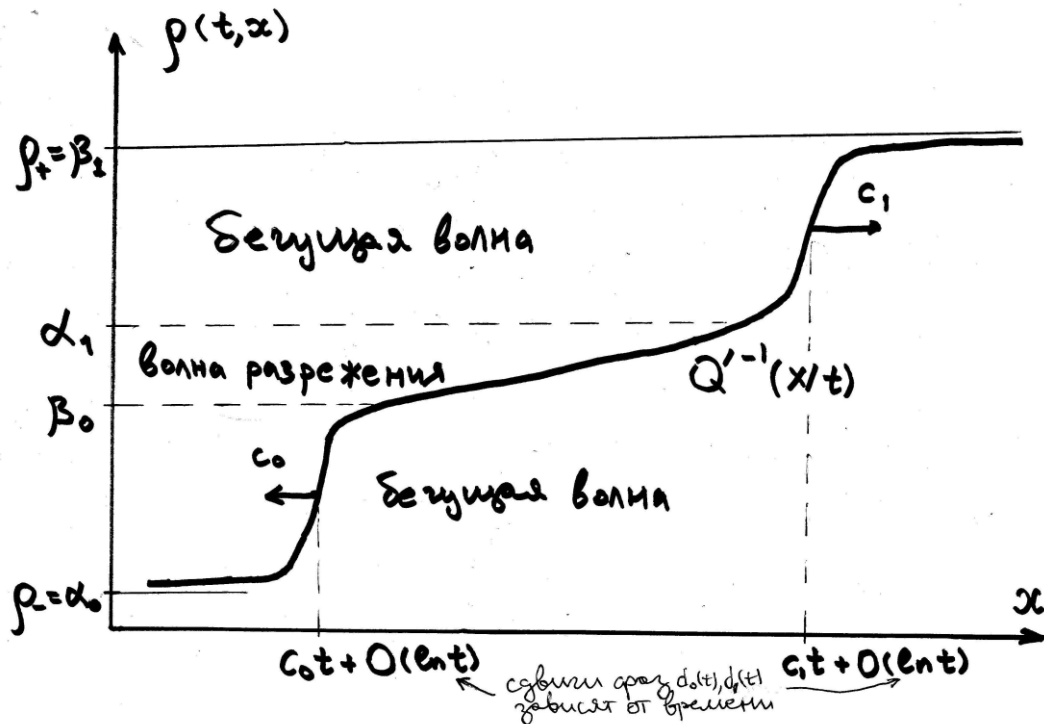


Рис. 18

Приведем в заключение этого параграфа схему доказательства теорем 1, 2 и аналогичного утверждения для модели Ньюэлла. Доказательство основывается на следствиях из *принципа максимума* для линейных параболических уравнений (с коэффициентами, зависящими от (t, x)) [38], [38], [82]: на *принципе сравнения*

$$\rho^1(0, x) \leq \rho^2(0, x) \Rightarrow \rho^1(t, x) \leq \rho^2(t, x), t \geq 0$$

и на *принципе сравнения на фазовой плоскости*

$$\begin{aligned} \{ \rho^1(0, x) < (>) \rho^2(0, x) \Rightarrow \rho^1(0, x') \leq (>) \rho^2(0, x'), x' \geq (<) x \} \Rightarrow \\ \{ \rho^1(t, x) < (>) \rho^2(t, x) \Rightarrow \rho^1(t, x') \leq (>) \rho^2(t, x'), x' \geq (<) x \}, t \geq 0. \end{aligned}$$

Эти принципы переносятся и на нелинейные параболические уравнения,²⁷ а также на некоторые их дифференциально – разностные (и просто разностные) аналоги. Приведенные принципы сравнения также переносятся и на некоторые уравнения (например, на закон сохранения), которые получаются путем предельного перехода (например, с помощью метода исчезающей вязкости) из нелинейных параболических уравнений.

В доказательстве часто в качестве сравниваемых функций выбираются: решение рассматриваемой задачи и специальным образом подобранное автомодельное решение (асимптотически автомодельное решение), либо специальным образом “склеенная” функция из таких решений. При этом значения на $x = \pm\infty$ (а также ординаты “склеек”, в случае если таковые имелись) у таких автомодельных решений выбираются из множества точек $\{\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \dots, \beta_{n-1}, \alpha_n, \beta_n\}$, либо из малых окрестностей этих точек, а сдвиги фаз подбираются так, чтобы в начальный момент времени выполнялись условия используемого варианта принципа сравнения.

Заметим, что основные идеи описанного подхода к доказательству теорем 1, 2 применялись ранее для исследования асимптотики (по времени) решения начальной задачи Коши для уравнения теплопроводности с нелинейным источником (такого рода уравнения возникают, например, при описании распространения генных волн и пламени). Так еще в 1937 г. в пионерской работе А.Н. Колмогорова, И.Г. Петровского, Н.С. Пискунова [83] была исследована сходимости к одной бегущей волне. Современное состояние дел отражено в работах [82], [84] и цитированной там литературе.

Следуя монографии [82], можно называть сходимости в теореме 2 *сходимостью по форме*. А согласно терминологии работы [79], системы волн, возникающие в теоремах 1, 2, следует называть *промежуточными асимптотиками* (заметим (см. теорему 2), что промежуточная асимптотика (система волн), в общем случае сама не обязана являться решением уравнения).

3.3.2 ЭВОЛЮЦИИ ЛОКАЛЬНОГО ЗАТОРА В ТРАНСПОРТНОМ ПОТОКЕ, ОПИСЫВАЕМОМ МОДЕЛЬЮ ЛАЙТХИЛЛА – УИЗЕМА – РИЧАРДСА

Предположим, что в однородном стационарном транспортном потоке (одна бесконечная полоса без въездов и съездов) образовалось локальное увеличение плотности (локальный затор). Проследим (не строго!) за эволюцией этого “бугорка”. Для этого

²⁷ Идея такого перенесения достаточно простая (и широко используется в теории параболических уравнений [48], [49], например, для оценки старших производных неизвестной функции) – нелинейные коэффициенты при частных производных объявляются некоторыми функциями независимых переменных (в нашем случае t и x). Далее делаются “априорные” предположения относительно неизвестной функции (как правило, предположения равномерной ограниченности неизвестной функции или(и) существования у нее (равномерно ограниченных) производных). В этих предположениях коэффициенты при частных производных оказываются “настолько хорошими” функциями, что к возникшему уравнению (в котором нелинейные коэффициенты, зависящие от неизвестной функции, интерпретируются просто как некоторые функции независимых переменных) применимы принципы сравнения. Затем, уже с помощью этих принципов, проверяется, что сделанные априорно предположения выполняются. В этой связи также заметим, что иногда априорные предположения выбирают единственное решение из множества возможных. Так для обычного уравнения теплопроводности априорное предположение, “что решение начальной задачи Коши (с равномерно ограниченной начальной функцией) будем искать в классе равномерно ограниченных функций” приводит начальную задачу Коши в класс корректных (по Адамару), т.е. имеющих и притом единственное решение, устойчивое по начальным данным. Но, как показывает пример А.Н. Тихонова, если не накладывать ограничение на рост решения с увеличением времени, то построенное решение уже не будет единственным.

введем $h(t)$ АТС/км – “высоту” бугорка и $l(t)$ км – “длину” бугорка в момент времени t (см. рис. 19). Поскольку площадь бугорка сохраняется (что как раз и отражает закон сохранения АТС), то

$$h(t)l(t) \approx 2S_0,$$

где S_0 - площадь (размерность площади - АТС) под бугорком. Здесь стоит приближенное равенство из-за того, что бугорок не будет в точности иметь вид прямоугольного треугольника (гипотенуза, в общем случае, будет кривой линией, и лишь на больших временах, достаточно хорошо приближается прямой). Сам факт, превращения (с ростом времени) произвольного бугорка в криволинейный прямоугольный треугольник (также как на рис. 19 считаем, что $Q''(\rho_0) < 0$), несложно устанавливается с помощью метода характеристик.

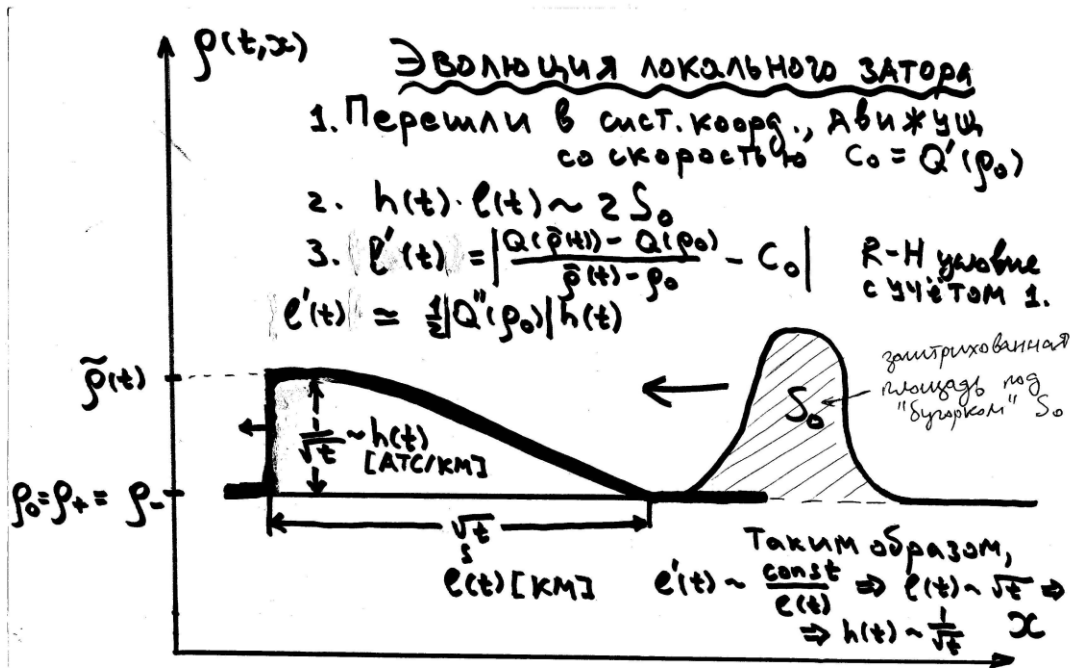


Рис. 19

Перейдем теперь в систему координат, движущуюся со скоростью $c_0 = Q'(\rho_0)$, где ρ_0 - значение плотности вдали от бугорка. В этой системе координат “скорость разбегания бугорка” можно посчитать по формуле Р – Н:

$$l'(t) = \left| \frac{Q(\tilde{\rho}(t)) - Q(\rho_0)}{\tilde{\rho}(t) - \rho_0} - c_0 \right| \approx \frac{1}{2} |Q''(\rho_0)| h(t),$$

где $\tilde{\rho}(t) = \rho_0 + h(t)$ - максимальной значение плотности в момент времени t . Таким образом,

$$l'(t) \sim \frac{|Q''(\rho_0)| S_0}{l(t)} \Rightarrow l(t) \sim \sqrt{2|Q''(\rho_0)| S_0} \cdot \sqrt{t} \Rightarrow h(t) \sim \sqrt{\frac{2S_0}{|Q''(\rho_0)|}} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Сделанные качественные выводы неплохо согласуются с практикой.

Приведенные выше рассуждения, являются частным случаем более общего и более точного утверждения “об асимптотике вида N – волны” (см. работы П. Лакса, Т.-П. Лю, Р. Ди Перна, К. Дафермоса, С.Н. Кружкова и Н.С. Петросян [2], [5], [22], [60]).

3.3.3 ЗАДАЧА О СВЕТОФОРЕ (ПРИ КАКИХ УСЛОВИЯХ ПЕРЕД СВЕТОФОРОМ НЕ БУДЕТ СКАПЛИВАТЬСЯ ОЧЕРЕДЬ)

В 1955 г. в работе [3] (см. также [5]) М. Лайтхиллом и Дж. Уиземом была поставлена и решена следующая задача:

Найти такое число $k > 0$, что перед светофором (работающим в двух режимах: зеленый и красный) не будет скапливаться очередь, если $T_{\text{зел}}/T_{\text{кр}} \geq k$. Считать, что транспортный поток вдали от светофора имеет плотность $\rho_i < \rho_m$ (значение потока q_i), где ρ_m - плотность, при которой значение потока максимально.

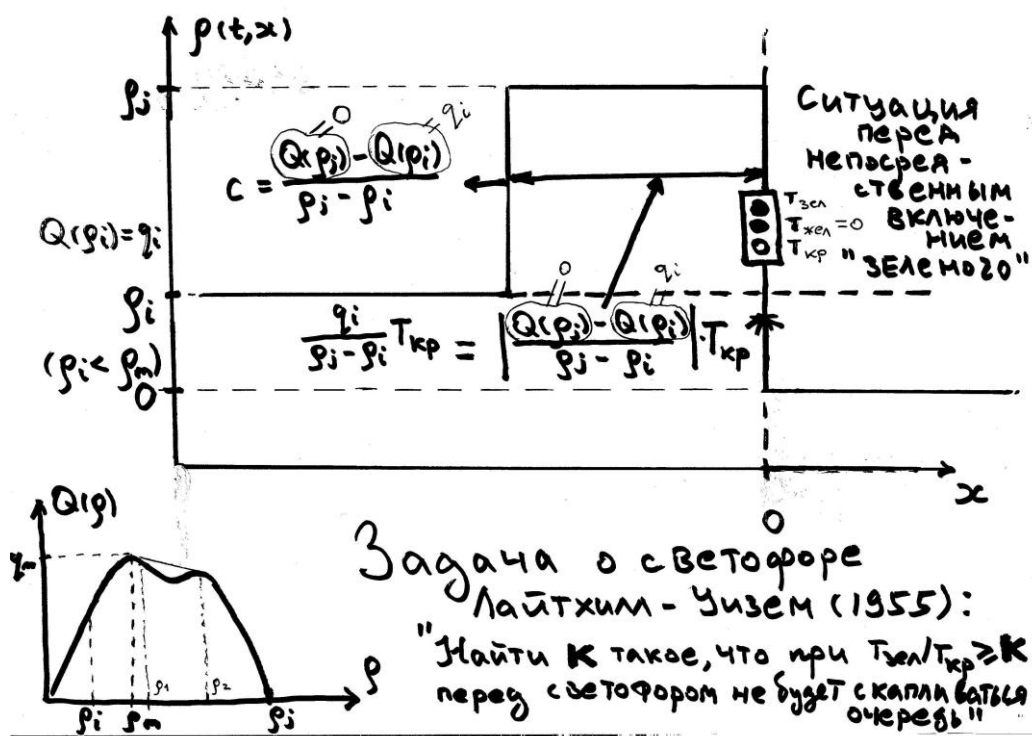


Рис. 20

Пусть загорелся красный цвет (рис. 20). Тогда от светофора на встречу транспортному потоку пойдет ударная волна со скоростью (возникшую краевую задачу удобно понимать, как начальную, если договориться считать, что за светофором плотность АТС максимальная ρ_{max} , т.е. за светофором движения нет)

$$c_{\text{кр}} = \left| \frac{Q(\rho_{\text{max}}) - Q(\rho_i)}{\rho_{\text{max}} - \rho_i} \right| = \frac{q_i}{\rho_{\text{max}} - \rho_i}.$$

“Излишек” АТС, скопившихся перед светофором за время горения красного цвета равен:

$$(\rho_{\text{max}} - \rho_i) \frac{q_i}{\rho_{\text{max}} - \rho_i} T_{\text{кр}} = q_i T_{\text{кр}}.$$

Пусть теперь загорелся зеленый цвет (рис. 21). Тогда до тех пор, пока весь излишек не пройдет через светофор, поток АТС через светофор будет максимальным и равным q_m (это не очень очевидное утверждение может быть установлено с помощью решения соответствующей задачи о распаде произвольного разрыва (см. п. 3.3.1)). Таким образом, перед светофором не будет скапливаться очередь, если

$$(q_m - q_i) T_{\text{зел}} \geq q_i T_{\text{кр}} \Rightarrow k = \frac{q_i}{q_m - q_i}.$$

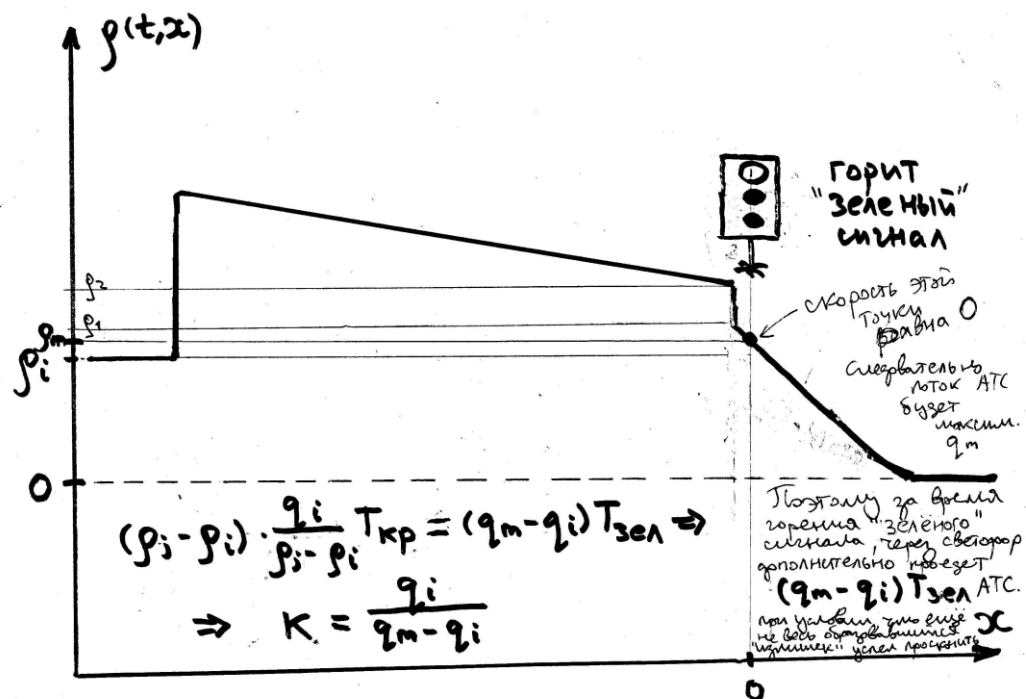


Рис. 21

3.3.4 Задача о сужении дороги

3.3.5 Модельные задачи на графах и устойчивость

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматлит, 2008.
2. Курант Г., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Издательство иностранной литературы, 1950.
3. Lighthill M.J., Whitham G.B. On kinematic waves: II. Theory of traffic flow on long crowded roads // Proc. R. Soc. London, Ser. A. V. **229**. 1955. P. 281–345.
4. Richards P.I. Shock Waves on the Highway // Oper. Res, V. **4**. 1956. P. 42–51.
5. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
6. Ballou D.P. Solution to nonlinear hyperbolic Cauchy problems without convexity condition // Trans. Amer. Math. Soc., V. 152. № 2. 1970. P. 441-460.
7. Олейник О.А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений// УМН, Т. 12. № 3(75). 1957. С. 3-73.
8. Hopf E. The partial differential equation $u_t + u u_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math, V. 3. № 3. 1950. P. 201-230.
9. Олейник О.А. Об одном классе разрывных решений квазилинейных уравнений первого порядка // Научные доклада высшей школы. Физико-математические науки, № 3. 1958. С. 91-98.
10. Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // УМН, 1959. Т. 14. № 2(86). С. 87-158.
11. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, М.: Наука, 1978.
12. Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А. Уравнения с частными производными первого порядка (учебное пособие). М.: Мехмат, 1999.
13. Гасников А.В. Сравнение определений обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения. Препринт. М.: ВЦ РАН, 2006. С. 1-75.
14. Иносэ Х., Хамада Т. Управление дорожным движением. М. Транспорт, 1983.
15. Бабков В.Ф. Дорожные условия и безопасность дорожного движения. М.: Транспорт, 1982.
16. Kumei S., Bluman G.W. When nonlinear differential equations are equivalent to linear differential equations // SIAM J. Appl. Math., V. 42. № 5. 1982. P. 1157–1173.
17. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
18. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1993.
19. Кружков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. сб., 1970. Т. 81(123). № 2. С. 228-255.
20. Кружков С.Н. Нелинейные уравнения с частными производными (Лекции). Часть 2. Уравнения первого порядка. М.: Изд-во МГУ, 1970.
21. Serre D. System of conservation laws: A challenge for the XXIst century, in: B. Enquist, W. Schmid (Eds.), Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond: Springer-Verlag, Berlin, New York, 2001. P. 1061–1080.
22. Dafermos C.M. Hyperbolic conservation laws in continuum physics. Springer, 2005.
23. Lions P.-L. О некоторых интригующих проблемах нелинейных уравнений в частных производных. Математика: границы и перспективы. М.: ФАЗИС, 2005, стр.193-211.
24. Тупчиев В.А. Обобщенные решения законов сохранения. М.: Наука, 2006.
25. Эванс Л.К. Методы слабой сходимости для нелинейных уравнений с частными производными. Новосибирск, 2006.
26. Holden H., Risebro N.H. Front tracking for hyperbolic conservation laws. Springer, 2007.
27. Nonlinear conservation laws and applications. University of Minnesota, July 13 – 31, 2009.
<http://www.ima.umn.edu/2008-2009/SP7.13-31.09/index.html#schedule>

28. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М.: Наука, 1967.
29. *Крылов Н.В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гёльдера, Новосибирск: Научная книга, 1998.
30. *Оптимальное управление.* Под ред. Н.П. Осмоловского и В.М. Тихомирова. М.: МЦНМО, 2009.
31. *Эванс Л.К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск: Университетская серия, Т. 7, 2003.
32. *Демьянов В.Ф.* Минимум, дифференцируемость по направлениям. Ленинград: Издательство ЛГУ, 1974.
33. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных. Перспективы динамической оптимизации. Москва, Ижевск: Институт Компьютерных Исследований, РХД, 2003.
34. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: УРСС, 2003.
35. *Пишечный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
36. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилианеризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968.
37. *Петров И.Б., Лобанов А.И.* Лекции по вычислительной математике, М.: Бином, 2006.
38. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2010. (2-е изд., в печати)
39. *Швецов В.И.* Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика, № 11. 2003.
40. *Helbing D.* Traffic and related self-driven many particle systems // Reviews of modern physics, V. 73. № 4. 2001. [arXiv:cond-mat/0012229](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0012229).
41. *Смирнов Н.Н., Киселёв А.Б., Никитин В.Ф., Юмашев М.В.* Неустановившиеся движения автотранспорта на кольцевой магистрали // Прикл. матем. и мех., Т. 64. № 4. 2000. С. 651–658.
42. *Смирнов Н.Н., Киселёв А.Б., Никитин В.Ф., Юмашев М.В.* Математическое моделирование автомобильных потоков на магистралях // Вестник Моск. ун-та, Математика. Механика, № 4. 2000. С. 39–44.
43. *Морозов И.И., Холодов Я.А.* Моделирование динамики транспортных потоков // Труды 51-й научной конференции МФТИ. Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Часть VII. Управление и прикладная математика. Т. 2. Москва - Долгопрудный, 2008. С. 128-129.
44. *Карамзин Ю.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чубарова Н.Г.* Двумерная модель автомобильных потоков // Матем. мод., Т. 18. № 6. 2006. С. 85–95.
45. *Сушинова А.Б., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чубарова Н.Г.* Двумерная макроскопическая модель транспортных потоков // Матем. мод., Т. 21. № 2. 2009. С. 118–126.
46. *Buslaev A.P., Prikhodko V.M., Tatashev A.G., Yashina M.V.* The deterministic – stochastic flow model // e-print [arXiv:physics/0504139v1](https://arxiv.org/abs/physics/0504139v1), 2005.
47. *Garavello M., Piccoli B.* Traffic Flow on Networks. Volume 1 of AIMS Series on Applied Mathematics. AIMS, 2006.
48. *Göttlich S., Klar A.* Model hierarchies and optimization for dynamic flows on networks. Modeling and optimization of flows on networks. Cetaro (CS), June 15 – 19, 2009. C.I.M.E. Courses, 2009. <http://php.math.unifi.it/users/cime/Courses/2009/01/200914-Notes.pdf>
49. *Alexander Alexandrovich Kurzhansky*, PhD thesis, Berkeley: University of California, 2007; *Xiaotian Sun*, PhD thesis, Berkeley: University of California, 2005; *Gabriel Clemente Gomes Parisca*, PhD thesis, Berkeley: University of California, 2004.
50. *Dangazo C.F.* The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory // Transp. Res. –B., V. 28B. № 4. 1994. P. 269–287.

51. *Dangazo C.F.* The cell transmission model, Part II: Network traffic // *Transp. Res. –B.*, V. 29B. № 2. 1995. P. 79–93.
52. *Kerner B.S.* Introduction to modern traffic flow theory and control. The long road to three - phase traffic theory. Springer, 2009.
53. *Lubashevsky I., Kalenkov S., Mahnke R.* Towards a variational principle for motivated vehicle motion // *Phys. Rev. E*, V. 65. 2002. 036140. P. 1-5.
54. *Newell G.F.* Nonlinear effects in the dynamics of car - following // *Oper. Res.*, V. 9. 1961. P. 209-229.
55. *Новокушенов В.Ю.* Введение в теорию солитонов. Москва – Ижевск: РХД, 2002.
56. *Ильин А.М., Олейник О.А.* Асимптотическое поведение решений задачи Коши для некоторых квазилинейных уравнений при больших значениях времени // *Матем. сб.*, 1960. Т. 51(93). № 2. С. 191-216.
57. *Osher S., Ralston J.* L^1 stability of traveling waves with application to convective porous media flow // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1982. V. 35. P. 737-749.
58. *Weinberger H.F.* Long-time behavior for regularized scalar conservation law in absence of genuine nonlinearity // *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire*, V. 7. 1990. P. 407-425.
59. *Петросян Н.С.* Об асимптотике решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка с невыпуклой функцией состояния // *УМН*, 1983. Т. 38. № 2(230). С. 213-214.
60. *Кружков С.Н., Петросян Н.С.* Асимптотическое поведение решений задачи Коши для нелинейных уравнений первого порядка // *УМН*, 1987. Т. 42. № 5(257). С. 3-40.
61. *Jennings G.* Discrete shocks // *Comm. Pure Appl. Math.*, V. 27. 1974. P. 25–37.
62. *Harten A., Hyman J.M., Lax P.D.* On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks // *Comm. Pure Appl. Math.*, V. 29. 1976. P. 297–322.
63. *Engquist B., Osher S.* One-sided difference approximations for nonlinear conservation laws // *Math. Comp.*, V. 36. 1981. P. 321–351.
64. *Henkin G.M., Polterovich V.M.* Shumpetrian dynamics as non-linear wave theory // *J. Math. Econom.*, 1991. V. 20. P. 551-590.
65. *Henkin G.M., Polterovich V.M.* A difference-differential analogue of the Burgers equation and some models of economic development // *Discrete and continuous dynamic systems*, 1999. V. 5. № 4. P. 697-728.
66. *Mejai M., Volpert V.* Convergence to systems of waves for viscous scalar conservation laws // *Asymptotic Analysis*, 1999. V. 20. P. 351-366.
67. *Engelberg S., Schochet S.* Nonintegrable perturbation of scalar viscous shock profiles // *Asymptotic Analysis*, 2006. V. 48. P. 121-140.
68. *Henkin G.M., Shananin A.A., Tumanov A.E.* Estimates for solution of Burgers type equations and some applications // *J. Math. Purés Appl.*, 2005. V. 84. P. 717-752.
69. *Henkin G.M., Shananin A.A.* Asymptotic behavior of solutions of the Cauchy problem for Burgers type equations // *J. Math. Purés Appl.*, 2004. V. 83. P. 1457-1500.
70. *Henkin G.M.* Asymptotic structure for solutions of the Cauchy problem for Burgers type equations // *J. fixed point theory appl.*, July 4, 2007. V. 1. № 2. P. 239-291.
71. *Serre D.* L^1 stability of shock waves in scalar conservation laws, in: *Evolutionary Equations // Handbook of Differential Equations*, North-Holland, Amsterdam. 2004. V. 1. P. 473-553.
72. *Гасников А.В.* О промежуточной асимптотике решения задачи Коши для квазилинейного уравнения параболического типа с монотонным начальным условием // *Известия РАН. Теория и системы управления*, № 3. 2008. С. 154–163.
73. *Гасников А.В.* Сходимость по форме решения задачи Коши для квазилинейного уравнения параболического типа с монотонным начальным условием к системе волн // *ЖВМ и МФ*, Т. 48. № 8. 2008. С. 1376-1405.
74. *Гасников А.В.* Асимптотическое по времени поведение решения начальной задачи Коши для закона сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью // *Известия РАН. Серия математическая*, Т. 76. № 6. 2009. С. 39-76.

75. Гасников А.В. Асимптотика по времени решения задачи о распаде “размазанного разрыва” для закона сохранения // Труды МФТИ, Т. 1. № 4. 2009. С. 120-125.
76. Gazis D.C. Traffic science. N.Y.: Wiley, 1974.
77. Treiber M., Helbing D. Explanation of observed features of self-organization in traffic flow // e-print [arXiv:cond-mat/9901239](https://arxiv.org/abs/cond-mat/9901239), 1999.
78. Treiber M., Hennecke A., Helbing D. Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulation // Phys. Rev. E, V. 62. 2000. P. 1805-1824.
79. Баренблатт Г.И. Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг. Долгопрудный: Издательский дом “Интеллект”, 2009.
80. Ибрагимов Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского университета, 2007.
81. Шестаков А.А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: КомКнига, 2007.
82. Volpert A.I., Volpert V.I., Volpert V.I. Traveling waves solutions of parabolic system // Translations of Mathematical Monographs, 2000. V. 140. P. 1-455.
83. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Математика и механика, 1937. № 6. Т. 1. С. 1-26.
84. Разжевайкин В.Н. Решения типа бегущей волны для уравнения реакции – нелинейной диффузии // Труды МФТИ, Т. 1. № 4. 2009. С. 99-119.